Vzorové riešenia 1. série letnej časti KMS 2016/2017

Úloha č. 1: *Ako každé Vianoce, aj tie minuloročné sa Kevin stratil v New Yorku. Bol tam úplne sám. Ostali mu len dve prirodzené čísla n, m. Dokážte, že ak je $2^n + 3^m$ deliteľné piatimi, tak je aj $2^m + 3^n$ deliteľné piatimi.*

Riešenie: (opravovali Iveta a Veronika)
Keďže máme dokazovať niečo o deliteľnosti, príde nám vhod pozrieť sa na zvyšky po delení 5-timi. Skutočnosť, že dve čísla a, b dávajú po delení 5-timi rovnaký zvyšok, budeme zapisovať ako $a \equiv b \pmod 5$. Na začiatok sa pozrieme na zvyšky mocnín čísel 2 a 3 po delení 5-timi:

n	2^n	zvyšok 2^n	3^n	zvyšok 3^n
0	1	1	1	1
1	2	2	3	3
2	4	4	9	4
3	8	3	27	2
4	16	1	81	1

Zvyšky sa od štvrtej mocniny (2^4, 3^4) začnú opakovať. Prečo je to tak? Vezmime si dve mocniny dvojky, ktoré nám dajú rovnaký zvyšok:

$$2^0 \equiv 1 \pmod 5, \quad 2^4 \equiv 1 \pmod 5, \quad \text{teda} \quad 2^4 = 5k + 1.$$

Ak chceme zistiť zvyšok nasledujúcej mocniny, tak stačí zvyšok pôvodnej vynásobiť dvomi. Dostaneme:

$$2^5 \equiv (5k+1) \cdot 2 \equiv 2 \cdot 5k + 2 \equiv 2 \pmod 5.$$

Člen $2 \cdot 5k$ po delení 5-timi zjavne dá nulu, preto zvyšok po delení 5-timi bude 2. Taktiež všeobecne, ak by sme chceli mocninu zvýšiť o n, násobili by sme výrazom 2^n, no prvý člen by bol stále násobkom 5-tich, teda dáva nulu (mod 5). Preto stačí násobiť zvyšok, z toho ale máme $2^{4+n} \equiv 2^n \pmod 5$, teda zvyšky sa musia pravidelne opakovať. Podobne to bude fungovať pre trojku a 3^n.

Preto sa stačí pozrieť na prvé štyri riadky tabuľky, aby sme zistili aké sú možné kombinácie zvyškov po delení 5-timi. Číslo $2^n + 3^m$ je deliteľné piatimi, ak je súčet zvyškov 2^n a 3^m po delení 5-timi deliteľný 5-timi. Rozoberme si teraz všetky možnosti, ktoré môžu nastať:

- ak $2^n \equiv 1 \pmod 5$, tak musí byť $3^m \equiv 4 \pmod 5$,
- ak $2^n \equiv 2 \pmod 5$, tak musí byť $3^m \equiv 3 \pmod 5$,
- ak $2^n \equiv 3 \pmod 5$, tak musí byť $3^m \equiv 2 \pmod 5$,
- ak $2^n \equiv 4 \pmod 5$, tak musí byť $3^m \equiv 1 \pmod 5$.

Čo sa stane, ak vymeníme n a m? V tabuľke sa môžeme presvedčiť, že nám to aj potom bude sedieť. Všade tam, kde trojka dáva zvyšok 3, nám dvojka dá zvyšok 2 a naopak, všetky mocniny, ktoré nám dajú z dvojky zvyšok 2, dávajú z trojky zvyšok 3. Máme teda súčet zvyškov $2 + 3 = 5$.

Podobne, ak máme zvyšok 2^n rovný štyrom, potom zvyšok 3^m musí byť 1. No z tabuľky znova vidno, že ak vymeníme n a m tak iba meníme jednotky za štvorky a štvorky za jednotky, teda znovu dostaneme súčet 5.

Ukázali sme, že ak je $2^n + 3^m$ deliteľné piatimi, tak je aj $2^m + 3^n$ deliteľné piatimi.

Úloha č. 2: *V New Yorkskej letiskovej hale treba vymeniť dlaždice. Hala má tvar trojuholníka ABC a vnútri neho sa nachádza bod P. Bodom P sú vedené tri priamky rovnobežné so stranami trojuholníka, ktoré rozdeľujú podlahu haly* *na menšie časti (ako na obrázku). Robotníci už odmerali plochy troch menších trojuholníkov:* $S_1 = 4\,\mathrm{cm}^2$, $S_2 = 9\,\mathrm{cm}^2$ *a* $S_3 = 16\,\mathrm{cm}^2$. *Zistite, aký je obsah celej podlahy* ABC*, ktorú treba vydláždiť.*

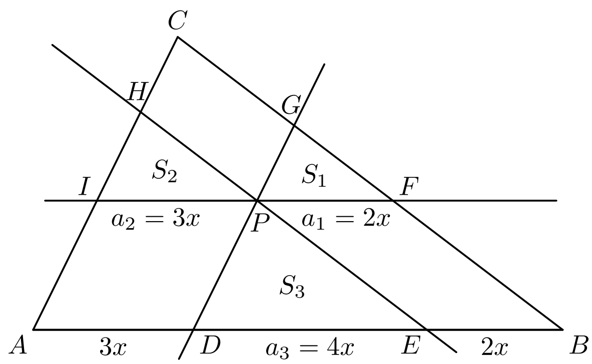
Riešenie: (opravovali Dušky a Zajo)
Ako prvé si všimneme, že všetky tri malé trojuholníky sú si navzájom podobné a zároveň sú podobné aj s veľkým trojuholníkom ABC. Sú si podobné, pretože ich vnútorné uhly sú totožné s uhlami trojuholníka ABC. Táto zhoda uhlov nie je náhodou, keď si zoberieme rovnobežku k ramenu uhla, tak vidíme, že uhol medzi druhým ramenom uhla a rovnobežkou je rovnaký ako pôvodný uhol.

Teraz dajme do vzťahu pomery obsahov a pomery strán trojuholníkov. Ak a a b sú strany podobných trojuholníkov, v_a a v_b sú výšky a k je koeficient podobnosti daných trojuholníkov tak platí:

$$k = \frac{a}{b} = \frac{v_a}{v_b}$$

$$k^2 = \frac{a \cdot v_a}{b \cdot v_b} = \frac{\frac{a \cdot v_a}{2}}{\frac{b \cdot v_b}{2}} = \frac{S_a}{S_b}$$

Z toho vyplýva, že ak je pomer strán trojuholníkov k, potom pomer ich obsahov je k^2. V našom príklade to použijeme na tri trojuholníky zo zadania:



Obr. 1

$$S_1 : S_2 : S_3 = 4 : 9 : 16$$

$$a_1 : a_2 : a_3 = 2 : 3 : 4$$

Z pomeru vieme, že dĺžky strán a_1, a_2 a a_3 vieme nahradiť nejakým násobkom čísla x takto: $a_1 = 2x$, $a_2 = 3x$ a $a_3 = 4x$. Zo zadania vyplýva, že štvoruholníky $ADPI$, $EBFP$ a $HPGC$ sú rovnobežníky, preto $|IP| = |AD| = 3x$ a $|PF| = |EB| = 2x$. Potom $|AB| = |AD| + |DE| + |EB| = 3x + 4x + 2x = 9x$.

Keďže trojuholníky ABC a DEP sú podobné a $|AB| : |DE| = 9 : 4$, z vyššie odvodeného vzťahu vyplýva:

$$S : S_3 = 9^2 : 4^2 = 81 : 16.$$

Príklad je teraz už takmer vyriešený, stačí nám z predchádzajúcej rovnice vyjadriť obsah celého trojuholníka:

$$S = \frac{81}{16} S_3 = \frac{81}{16} \cdot 16 = 81.$$

Obsah celej trojuholníkovej podlahy ABC je $81\,\mathrm{cm}^2$.

Úloha č. 3: *Centrum New Yorku sa skladá z* n *severojužných a* n *západovýchodných ciest, ktoré tvoria štvorčekovú sieť*
$(n-1) \times (n-1)$ *štvorcových blokov. V každej z* n^2 *križovatiek sa nachádza autobusová zastávka. Po uliciach premávajú autobusové linky so zastávkami vo všetkých križovatkách. Trasa každej linky obsahuje najviac jednu zákrutu a je obojsmerná. Koľko najmenej liniek je potrebných na to, aby sa dalo medzi ľubovoľnými dvomi zastávkami cestovať na najviac jeden prestup? Výsledok určte v závislosti od celého čísla* $n \geq 2$. *Nezabudnite zdôvodniť, prečo menej liniek nestačí.*

Riešenie: (opravoval Dominik)
Riešenie tejto úlohy a úloh podobného typu zvyčajne pozostáva z dvoch častí: potrebujeme ukázať, že pre náš výsledok vieme nájsť riešenie a tiež nájsť a popísať dôvod, prečo to nevieme spraviť lepšie.

Začať môžeme napríklad tým, že zistíme, koľko najmenej liniek je potrebných k tomu, aby bola každá zastávka obslúžená. Vieme, že štvorčeková sieť centra New Yorku sa skladá z n riadkov a n stĺpcov. Každá linka môže mať maximálne 1 zákrutu, teda sa nemôže stať, aby jedna linka prešla v dvoch rôznych riadkoch alebo stĺpcoch aspoň dve políčka. Môže prejsť jeden celý riadok/stĺpec, ale z nejakého iného riadka/stĺpca vie obsadiť maximálne jedno políčko. Čo z toho vyplýva? Ak by sme chceli n riadkov/stĺpcov obsadiť menej ako n linkami, nejaký riadok/stĺpec by sme nutne nemohli obsadiť celý, pretože bude existovať riadok/stĺpec, pre ktorý každá linka obsadila maximálne jedno políčko, teda celkovo maximálne $n-1$ políčok. Preto potrebujeme aspoň n liniek.

Teraz ešte potrebujeme ukázať, že pre n liniek naozaj zadanie splniť vieme. Ak chceme, aby sa medzi ľubovoľnými dvomi zastávkami dalo cestovať na jeden prestup, potom musí mať každá dvojica liniek nejakú spoločnú zastávku. Ak by nejaké dve linky A a B nemali spoločnú zastávku (využijeme fakt, že linku zrušiť nemôžeme, pretože pre $n-1$ liniek to nejde, z čoho vyplýva, že na každej linke existuje zastávka, na ktorej jazdí len jedna linka, inak by sme ju mohli zrušiť), potom by sa zo zastávky, na ktorej jazdí len linka A nedalo dostať do zastávky, na ktorej jazdí len linka B na jeden prestup. Ako jedno z jednoduchších riešení sa ukazuje možnosť, že by v centre New Yorku bola jedna hlavná stanica, kde by stáli všetky linky. Potom by stačilo, aby cestujúci prestúpil na nej a na jeden prestup sa tak dostane hocikam. Ako by takáto štvorčeková sieť mohla vyzerať?

Ako hlavnú stanicu si určíme bod, ktorý je úplne najviac vpravo dole. Linku 1 zavedieme z ľavého horného rohu cez ľavý dolný roh a potom do pravého dolného rohu, spravíme tak linku podobnú písmenu L. Následne linka 2 začne zo zastávky o jedna vpravo od začiatku linky 1, opäť ide najviac na juh, ako môže, a potom na západ až do hlavnej stanice. Takto skonštruujeme linky od 1 až po n, kde linka n bude už len severojužná linka v poslednom stĺpci. Z toho, ako sme si linky a hlavnú stanicu zadefinovali, je jasné, že naša sieť bude spĺňať zadanie a teda je príklad vyriešený.

<u>Úloha č. 4:</u> *Newyorkskí stredoškoláci trávia svoj voľný čas streetballom. Nemajú tam totiž KMS. Najlepšie sa hrá takej partii, ktorá sa vie rovnomerne rozdeliť.*
Nájdite všetky šestice po sebe idúcich prirodzených čísel, ktoré je možné rozdeliť do dvoch skupín (nie nutne rovnako veľkých) s rovnakým súčinom.

<u>Riešenie:</u> (opravovali Adam a Marek)
Po chvíľke skúšania a hľadania nadobúdame dojem, že taká šestica neexistuje. Tak sa to pokúsime dokázať. Ak majú mať dve skupiny čísel rovnaký súčin, musia mať oba súčiny v rozklade na prvočísla rovnako veľa toho istého prvočísla. Teda ak v rozklade prvého súčinu máme p^k, potom aj v druhom rozklade musí byť p^k. Preto sa pozrieme na jednotlivé prvočísla.

Najskôr sa pozrieme na prvočísla väčšie ako 6. Ak nejaké prvočíslo $p > 6$ delí niektoré z čísel a, $a+1$, …, $a+5$, označme si to číslo $a+k$, tak delí aj čísla $a+k-p$ a $a+k+p$, obe zjavne nepatria medzi a, $a+1$, …, $a+5$. No a na to, aby sme tú skupinu rozdelili „spravodlivo“, tak potrebujeme aby p delilo aj iné číslo ako $a+k$, aby sme ho mohli dať do druhej skupiny. Keby nedelilo, tak rozklady na prvočísla sa nezhodujú, a teda nemôžu sa súčiny rovnať. To ale znamená, že v prvočíselnom rozklade čísel a, $a+1$, …, $a+5$ budú len prvočísla 2, 3, 5 a každé musí deliť aspoň dve čísla.

Teraz máme na výber viacero možností, čo s tým. Môžme skúsiť všetky možnosti, ako by mohli prvočísla deliť a, $a+1$, ..., $a+5$. Môžme sa taktiež pozerať na zvyšky po delení číslami 2, 3 alebo 5. My sa najprv pozrieme na zvyšky po delení piatimi.

O číslach deliteľných piatimi vieme, že majú byť dve a vieme, že rozdiel dvoch rôznych čísel deliteľných piatimi je aspoň 5. Jediné dve čísla z a, $a+1$, …, $a+5$, ktoré majú rozdiel 5 sú a a $a+5$. Na tento fakt ste prišli viacerí, a to vám mohlo nahintiť deliteľnosť piatimi. Teraz máme čísla $a+1$, …, $a+4$. Z nich sú deliteľné dvoma buď $a+1$ a $a+3$, alebo $a+2$ a $a+4$. Teraz by sme potrebovali, aby tie čísla, čo ostali, boli deliteľné tromi, teda buď $3 \mid a+2$ a $3 \mid a+4$, alebo $3 \mid a+1$ a $3 \mid a+3$. No ale tieto čísla sú od seba vzdialené o dva, a teda aj keby 3 delilo jedno z nich, nedelí to druhé. Čo znamená, že vždy máme nejaké číslo, ktoré je nedeliteľné ani dvomi, ani tromi, ani piatimi. Môže to byť už len číslo 1 (prvočísla väčšie ako 6 sme už zakázali), ale jediná šestica obsahujúca 1 je 1, 2, 3, 4, 5, 6. A tá zjavne nevyhovuje.

Záver je, že žiadna šestica po sebe idúcich čísel sa nedá rozdeliť do dvoch skupín s rovnakým súčinom.

<u>Úloha č. 5:</u> *Okraj podstavca Sochy slobody má tvar kružnice k. Na nej sú umiestnené v dvoch rôznych bodoch A, B reflektory, ktoré ju osvetľujú. Robotníci majú na obvod podstavca umiestniť ešte tretí reflektor, ale nevedia sa dohodnúť kam. Pre dané body A, B na kružnici k nájdite bod C ležiaci na kružnici k tak, aby*

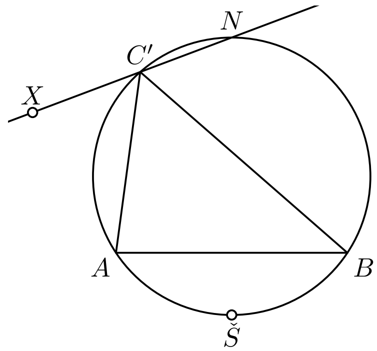
a) obsah trojuholníka ABC bol čo najväčší,

b) obvod trojuholníka ABC bol čo najväčší.

<u>Riešenie:</u> (opravovali Katka a Kika)
Pozrime sa najprv na časť a). Chceme nájsť bod C tak, aby trojuholník ABC mal čo najväčší obsah. Obsah trojuholníka vieme vypočítať ako $\frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c$ a keďže naša strana c trojuholníka ABC je úsečka AB (ktorá má fixnú

dĺžku), tak nám stačí maximalizovať výšku na túto stranu. Množina bodov, ktoré sú rovnako vzdialené od priamky AB je rovnobežka s touto priamkou. To znamená, že všetky trojuholníky so stranou AB a bodom C na tejto rovnobežke majú rovnaký obsah. Ktorá rovnobežka je od AB najďalej a súčasne má aspoň jeden spoločný bod s kružnicou, na ktorej je AB? Je zrejmé, že takáto rovnobežka musí byť dotyčnica. Čo je zač ten dotykový bod? Musí to byť priesečník kružnice a osi strany AB. Tak najväčší obsah sme našli.

Ok, to bolo ľahké, tak sa poďme pozrieť na časť b). Je jasné, že bod C má zmysel hľadať len v dlhšom z oblúkov, na ktoré je kružnica rozdelená úsečkou AB. Ak náhodou ti to nie je zjavné, tak si to dokáž. To je také jednoduché cvičenie. Zvoľme si v tomto oblúku ľubovoľný bod C'. Presečník osi úsečky AB a kružnice (víťaza časti a)) si označme N. Spojme si body C' a N priamkou.



Obr. 2

Dokážeme, že uhly $AC'X$ a $BC'N$ sú zhodné. Zadefinujeme si bod $\check{S}$, bude to stred kratšieho oblúka AB. Ak je $|\sphericalangle AC'B| = \gamma$, tak $|\sphericalangle A\check{S}B| = 180° - \gamma$. Trojuholník $A\check{S}B$ je rovnoramenný, a teda $|\sphericalangle \check{S}AB| = |\sphericalangle \check{S}BA| = \frac{1}{2}\gamma$. Uhly $\check{S}AB$ a $\check{S}C'B$ sú obvodové uhly prislúchajúce k oblúku $\check{S}B$, teda sú zhodné. Keďže $|\sphericalangle \check{S}C'B| = \frac{1}{2}\gamma$, tak priamka $C'\check{S}$ je os uhla $AC'B$. Úsečka $\check{S}N$ je priemer, z čoho vyplýva, že $|\sphericalangle \check{S}C'N| = 90°$. Vieme dopočítať, že $|\sphericalangle BC'N| = 90° - \frac{1}{2}\gamma$ a $|\sphericalangle AC'X| = 90° - \frac{1}{2}\gamma$ takisto. Dokázali sme, čo sme chceli a síce, že uhly $AC'X$ a $BC'N$ sú zhodné.

Teraz nájdeme bod B', tak že body B a B' budú osovo súmerné podľa priamky $C'N$. Aká je najkratšia vzdialenosť medzi bodmi A a B'? Jednoducho ich spojíme priamkou. Vieme, že táto priamka prechádza bodom C', pretože uhly $AC'X$ a $NC'B'$ sú zhodné (sú vrcholové) a takisto uhly $BC'N$ a $NC'B'$ sú zhodné Úsečka $C'B'$ je rovnako dlhá ako $C'B$ (tieto dve úsečky sú osovo súmerné podľa priamky $C'N$). Najkratšia vzdialenosť z bodu A na priamku a odtiaľ do bodu B vedie práve cez bod C'. Cesta, ktorá vedie cez bod N je od nej určite dlhšia, a teda trojuholník ABN má väčší obvod ako trojuholník ABC'. Toto ale platí pre akýkoľvek bod C', preto môžeme povedať, že trojuholník s najväčším obvodom je trojuholník ABN. Bod N je teda náš hľadaný bod C.

Úloha č. 6: *New Yorčania volia, ktoré prirodzené číslo sa stane ich starostom. Čísla však nemajú svojich voliteľov, ale deliteľov. Nech $d_1, d_2, \ldots, d_k$ spĺňajúce $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = N$ sú všetky kladné delitele prirodzeného čísla $N \geq 2$. Prirodzené číslo N postúpi do druhého kola volieb práve vtedy, keď pre neho platí*

$$(d_1, d_2) + (d_2, d_3) + \cdots + (d_{k-1}, d_k) = N - 2.$$

Nájdite všetky prirodzené čísla N, ktoré postúpia do druhého kola volieb. Nezabudnite zdôvodniť, že ste naozaj našli všetky čísla.
Poznámka. (a, b) označuje najväčšieho spoločného deliteľa čísel a, b.

Riešenie: (opravovali Sima a Vodka)
Úloha mala len jedno riešenie, a to $N = 3$, ktoré našli všetci riešitelia. Na to aby sme dokázali, že iné riešenia neexistujú, bol kľúčový poznatok horný odhad pre $S(N) = (d_1, d_2) + \cdots + (d_{k-1}, d_k) \leq N - 1$. To sa dá sa vidieť, lebo ak pre rôzne a, b platí, že $(a, b) = D$, tak $D \mid a$ a $D \mid b$, a potom aj $D \mid (a - b)$. Pre rôzne a, b môžeme preto napísať: $(a, b) \leq |a - b|$ a $S(n)$ môžeme odhadnúť ako

$$(d_1, d_2) + (d_2, d_3) + \cdots + (d_{k-1}, d_k) \leq (d_2 - d_1) + (d_3 - d_2) + \cdots + (d_k - d_{k-1}) = d_k - d_1 = N - 1.$$

Keďže my potrebujeme $N - 2$, to znamená, že všetky dvojice najväčších spoločných deliteľov sa musia rovnať ich rozdielu ($(d_a, d_{a+1}) = d_{a+1} - d_a$) okrem jednej, ktorá musí byť o jedna menej, teda existuje jediné také i, že $D = (d_i, d_{i+1}) = d_{i+1} - d_i - 1$. Potom $D \mid d_{i+1}$, $D \mid d_i$ a $D \mid d_{i+1} - d_i - 1$ takže $D \mid -1$ čiže $D = 1$. Takže z $D = d_{i+1} - d_i - 1$ vieme, že $d_{i+1} - d_i = 2$. Teraz vidíme, že oba delitele sú nepárne (ak by boli oba párne tak by $2 \mid D$ a následne $2 \mid 1$). Číslo N si môžeme zapísať ako $N = d_i \cdot d_{i+1} \cdot R$, pre vhodné prirodzené R.

Teraz sa pozrieme na dva prípady. Ak by $R = 1$, tak buď $d_i = 1$ a v tom prípade ľahko zistíme, že $d_{i+1} = 3$, a teda $N = 3$, alebo $d_i > 1$. Teraz bude mať N deliteľov: $1, d_2, \dots, d_i, d_{i+1}, \dots, N$. Tu problém nastane v dvojici $(1, d_2)$. Vieme, že d_2 je nepárne, lebo $N = d_i d_{i+1}$ je nepárne. Tu máme problém, lebo $(1, d_2) = 1$, ale $d_2 - 1 \geq 2$ (kvôli parite d_2) a to je spor z predpokladom, že (d_i, d_{i+1}) je jediná dvojica, čo sa nerovná vlastnému rozdielu $(d_{i+1} - d_i)$.

Druhý prípad je, ak $R > 1$. Pozrieme sa na čísla Rd_i a Rd_{i+1}. Tieto dva delitele N pôjdu určite za sebou. Ľahko si overíme, že ak by pre nejaké prirodzené P platilo $P \mid N$ a $Rd_i < P < Rd_{i+1}$, tak N/P by padlo medzi d_i a d_{i+1}, čo sa nemôže stať. Zjavne je $(Rd_i, Rd_{i+1}) = R$. Využitím $d_{i+1} - d_i = 2$ odvodíme $Rd_{i+1} - Rd_i = 2R$. Tieto dve čísla by sa mali rovnať, ale $R \neq 2R$, takže máme spor.

Teda jediné číslo, čo postúpi do ďalšieho kola je $N = 3$.

Úloha č. 7: *Označme I stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC a X, Y, Z postupne jej body dotyku so stranami BC, CA, AB. Priamky BI a CI pretínajú priamku YZ v bodoch P a Q. Dokážte, že ak bod X leží na osi úsečky PQ, tak potom je trojuholník ABC rovnoramenný.*

Riešenie: (opravoval Jožo)

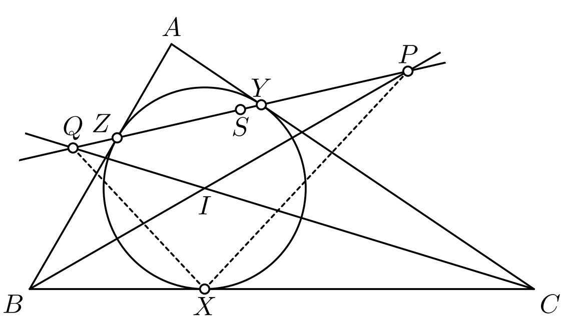
Na začiatok si musíme ujasniť, čo je cieľom úlohy. Máme daný nejaký trojuholník ABC a v ňom niekoľko bodov. Avšak nie je to hocijaký trojuholník. Zadanie nám hovorí, že bod X má ležať na osi úsečky PQ. Isto ste si všimli, že to neplatí v každom trojuholníku. Taktiež je ľahké si rozmyslieť, že ak trojuholník ABC bude rovnoramenný so základňou BC, tak bod X na osi PQ naozaj bude ležať. O tomto však úloha nie je. My máme dokázať, že ak si narysujeme nejaký trojuholník ABC, v ktorom bude bod X ležať na osi úsečky PQ, tak ten trojuholník musí byť rovnoramenný. Je dobré, aby sme si nakreslili trojuholník, ktorý nie je rovnoramenný, aby nás náčrt zbytočne nezvádzal používať tvrdenia, ktoré sme nedokázali.

Čo vieme z toho, že bod X leží na osi úsečky PQ? Vieme, že je rovnako vzdialený od jej krajných bodov, teda $|PX| = |QX|$. Tak poďme hľadať nejaké vzťahy medzi dĺžkami strán a pokúsime sa dopracovať k tomu, že $|AB| = |AC|$.

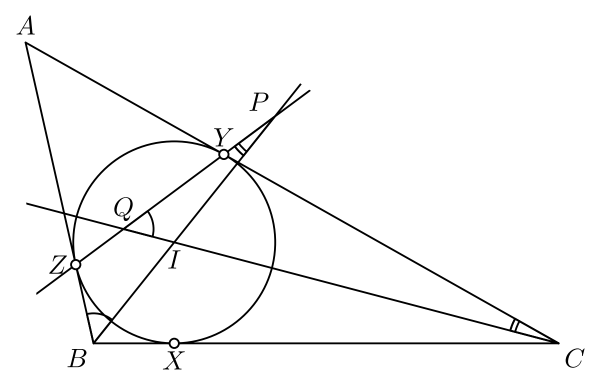
Začneme s niekoľkými počiatočnými pozorovaniami. Trojuholníky BZI a BXI sú zhodné podľa vety *sus* (rozmyslite si to). Z rovnakého dôvodu platia aj zhodnosti $\triangle CXI \cong \triangle CYI$ a $\triangle AYI \cong \triangle AZI$. Môžeme teda povedať, že $|BX| = |BZ|$, $|CX| = |CY|$ a $|AY| = |AZ|$. Trojuholník AZY je rovnoramenný. Priamka AI je v ňom osou uhla pri vrchole A, a preto je zároveň aj osou úsečky YZ. Podobne, priamky BI a CI sú osami úsečiek ZX a XY. Tieto pozorovania je dobré mať na pamäti, keď sa v úlohe objaví vpísaná kružnica a jej body dotyku so stranami.

Keď už vieme toto, môžeme si všimnúť zhodné trojuholníky BXP a BZP, teraz podľa vety *sus*. Z tejto podobnosti dostaneme už zaujímavejšiu rovnosť $|PZ| = |PX|$. Analogicky zo zhodných trojuholníkov CXQ a CYQ dostaneme, že $|QY| = |QX|$. Teraz môžeme využiť náš poznatok o tom, že $|PX| = |QX|$. Spojením týchto rovností dostaneme $|PZ| = |PX| = |QX| = |QY|$.

Označme si S stred úsečky PQ. Ak sa pozrieme na náš obrázok 3, všimneme si, že patí $|ZP| = |ZS| + |SP|$, $|QY| = |QS| + |SY|$ a ako sme vyššie ukázali, tak $|ZP| = |QY|$. Po rozpísaní teda dostaneme $|ZS| + |SP| = |QS| + |SY|$. Ak využijeme, že $|QS| = |SP|$, tak máme rovnosť $|ZS| = |SY|$. Tá nám hovorí, že bod S je zároveň aj stredom úsečky ZY.



Obr. 3



Obr. 4

To nám nahráva do kariet, lebo ako sme vyššie ukázali, priamka AI je osou úsečky ZY. Priamka SX je tiež kolmá na úsečku ZY a prechádza jej stredom, teda je tiež jej osou. To znamená, že os úsečky PQ a priamka AI splývajú. Inými slovami, body A, S, I, X ležia na jednej priamke. Avšak uhol IXB je pravý, lebo dotyčnica BC je kolmá na polomer IX vpísanej kružnice. Dostali sme teda, že os uhla BAC je kolmá na stranu BC. Z toho už ľahko vyplýva, že trojuholník ABC je rovnoramenný.

Sme teda spokojní, lebo sme dokázali, čo sme mali. Zabudli sme však na jednu vec. Pri dokazovaní, že S je stred úsečky YZ sme využívali, že body Z, Q, S, P, Y ležia na priamke v uvedenom poradí. Tieto body však vo všeobecnom[1] trojuholníku ABC môžu ležať aj niekoľkých iných poradiach (aj napr. Q, S, Z, Y, P, kedy neplatí $|ZP| = |ZS| + |SP|$). Tieto poradia budeme vždy udávať v smere od Y ku Z. Ako sa riešenie úlohy zmení a ktoré pozície vlastne môžu nastať?

Stačí nám ukázať, že platia rovnosti $|ZP| = |ZS| + |SP|$, resp. $|QY| = |QS| + |SY|$. Tie využívajú poradie bodov Z, S, P, resp. Q, S, Y. Očividne body P, S, Q ležia na priamke YZ v tomto poradí. Čo by sa stalo, ak by bod S ležal pred bodom Z? Potom by $|PZ| < |SP|$ a $|QY| > |QS| = |SP|$, teda úsečky ZP a QY nemôžu byť rovnako dlhé, čo je spor, lebo sme ukázali rovnosť ich dĺžok. Preto body Z, S, Q vždy ležia na priamke ZY v tomto poradí. Analogicky to platí aj pre body Q, S, Y. Môže sa nám ešte stať, že nejaké body splynú v jeden, vtedy budeme mať nulovú vzdialenosť, ale to nám rovnosti nepokazí. Rovnosti $|ZP| = |ZS|+|SP|$ a $|QY| = |QS|+|SY|$ teda platia vždy a z nich vieme už ukázať, že bod S je stredom úsečky YZ.

Ak si prejdeme naše zvyšné úvahy, tak žiadne ďalšie už nevyužívajú nejakú špeciálnu polohu bodov. Ukázali sme teda, že pri ľubovoľnom možnom rozmiestnení bodov, musí byť trojuholník ABC rovnoramenný.

<u>Iné riešenie:</u>
Stručne si naznačíme ešte jedno riešenie. Namiesto dĺžok strán budeme pracovať s uhlami. Budeme používať štandardné označenie veľkostí uhlov v trojuholníku. Trojuholník AZY je rovnoramenný preto $|\sphericalangle AYZ| = 90° - \alpha/2$ a $|\sphericalangle ZYC| = 90° + \alpha/2$. V trojuholníku CYQ potom vieme dopočítať $|\sphericalangle PQC| = 180° - (90° + \alpha/2) - \gamma/2 = \beta/2$. Uhly PQC a PBZ majú rovnakú veľkosť, preto body B, I, Z, O ležia na kružnici. Avšak podobne, ako v prvom riešení, aj tu si musíme dať pozor na polohu bodov. Od nej závisí dôvod, prečo je štvoruholník $BIZQ$ tetivový.

- Ak je bod Q vnútri trojuholníka ABC, tak je to rovnosť $|\sphericalangle IBZ| + |\sphericalangle IQZ| = 180°$.
- Ak je bod Q mimo trojuholníka ABC, tak je to rovnosť obvodových uholov IBZ a IQZ.
- Ak bod Q leží na strane AB, t. j. v bode Y, tak ide o tri body, ktoré na kružnici ležia vždy.

Prvé dva prípady môžete nájsť na obrázku 4. Štvor(troj)uholník $BIZQ$ je teda vždy tetivový a preto $|\sphericalangle BQC| = |\sphericalangle BZI| = 90°$. Analogicky na druhej strane dopočítame $|\sphericalangle BPC| = 90°$. Z toho vyplýva, že body B, C, P, Q ležia na tálesovej kružnici nad priemerom BC. Teraz si len stačí uvedomiť, že os úsečky PQ prechádza stredom tálesovej kružnice – stredom strany BC. Keďže os PQ pretína stranu BC v bode X, tak X musí byť stred strany BC. Ak sa má kružnica vpísaná trojuholníku ABC dotýkať strany BC v strede, tak ABC musí byť rovnoramenný trojuholník.

<u>Komentár:</u> Častou chybou pri riešení bolo nerozobratie možných polôh bodov. Tie totiž ovplyvňujú niektoré vzťahy, ktoré pri riešení používame. V prvom riešení to na ne nemalo vplyv. V druhom riešení už vždy neplatila zhodnosť uhlov IBZ a IQZ. Ak by sme využívali iné uhly, tak by sme mohli nesprávne tvrdiť, že $|\sphericalangle PYC| = |\sphericalangle AYZ| = 90° - \alpha/2$, lebo sú to vrcholové uhly. Pri inej polohe bodov (ak by bol P vnútri trojuholníka ABC) totiž môže ísť aj o susedné a dostaneme inú veľkosť uhla PYC.

Na záver by sme vám dali do pozornosti ešte jedno riešenie tejto úlohy, v ktorom nie je dobre rozobraná poloha bodov. Dokonca toto riešenie nevyužíva ani predpoklad, že bod X leží na osi úsečky PQ a úlohu rieši všeobecne! Nájdete ho ako príklad 5 v článku `https://old.kms.sk/~mazo/matematika/pocitanieUhlov.pdf`.

<u>**Úloha č. 8:**</u> *V New Yorku majú n žltých taxíkov. Kvôli lepšiemu prehľadu ich majú očíslované kladnými reálnymi číslami a_1, a_2, …, a_n so súčtom s. Dokážte, že*

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

<u>Riešenie:</u> (opravovali Slavo a Fero)
Nerovnosť je symetrická, preto môžeme predpokladať, že $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$. Potom platia nasledovné vzťahy:

$$-a_1 \geq -a_2 \geq \cdots \geq -a_n,$$
$$s - a_1 \geq s - a_2 \geq \cdots \geq s - a_n,$$
$$\frac{1}{s-a_1} \leq \frac{1}{s-a_2} \leq \cdots \leq \frac{1}{s-a_n}.$$

[1] vtedy o ňom ešte nevieme, že je rovnoramenný

Postupnosti

$$a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n \quad \text{aj} \quad \frac{1}{s-a_1},\, \frac{1}{s-a_2},\, \ldots,\, \frac{1}{s-a_n}$$

sú obe rovnako zoradené. Teraz si budeme členy týchto postupností navzájom párovať. V rámci páru čísla vynásobíme a výsledky sčítame. Budeme to robiť pre rôzne párovania. Popárovaním najmenších členov spolu, druhých najmenších členov spolu až n-tých najmenších členov spolu získame ľavú stranu (L) nerovnosti zo zadania. Navyše podľa permutačnej nerovnosti[2], je

$$L = \frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n}$$

maximálny súčet spomedzi popárovaní daných postupností. Využime tento fakt na dokázanie nerovnosti zo zadania. Vytvorme si iné popárovania členov postupností $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a $1/(s-a_1), 1/(s-a_2), \ldots, 1/(s-a_n)$ (ich hodnota bude nanajvýš L) tak, aby sa po ich sčítaní odstránili menovatele zlomkov.

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{a_2}{s-a_1} + \frac{a_3}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_1}{s-a_n}$$
$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{a_3}{s-a_1} + \frac{a_4}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_2}{s-a_n}$$
$$\vdots$$
$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{a_n}{s-a_1} + \frac{a_1}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{s-a_n}$$

Sčítaním týchto $n-1$ nerovností dostaneme

$$(n-1)(\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n}) \geq \frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{s-a_1} + \frac{a_1+a_3+\cdots+a_n}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{s-a_n},$$
$$(n-1)(\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n}) \geq \frac{s-a_1}{s-a_1} + \frac{s-a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{s-a_n}{s-a_n} = n.$$

Predelením $n-1$ (pre $n=1$ nerovnosť zo zadania nemá zmysel) dostaneme

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}, \text{ čo bolo treba dokázať.}$$

<u>Úloha č. 9:</u> *V New Yorku sú obľúbené štvorčekové siete. Preto aj kvetinový záhon v Central Parku má tvar štvorčekovej siete $m \times n$ políčok. V každom políčku rastie jeden typ kvetiny – nezáporné celé číslo. Takýto záhon sa nazýva záhradou, ak sú splnené nasledujúce dve podmienky:*

- *Rozdiel čísel na dvoch políčkach, ktoré susedia stranou, je 0 alebo 1.*
- *Ak je číslo v nejakom políčku menšie alebo rovné ako číslo na všetkých políčkach susediacich stranou, tak je rovné 0.*

V závislosti od kladných celých čísel m a n určte, koľkými spôsobmi môžu byť v záhone vysadené kvety, aby tvoril záhradu.

<u>Riešenie:</u> (opravovali Juro a Mišo)
Najprv si ošetrime prípad, keď $m = n = 1$, lebo vtedy to jedno políčko nemá suseda, takže obe pravidlá sú splnené bez toho aby nás nejako obmedzovali. Na tom políčku môže byť hocijaké nezáporné celé číslo.

V prípade, že je políčok viac, tak z druhého pravidla vieme, že každé nenulové políčko musí mať za suseda políčko menšie o 1 (vďaka prvému pravidlu). Aj ten sused musí mať menšie políčko za suseda (ak nie je nulou), potom jeho sused tiež a tak ďalej, až kým nedôjdeme k nule.

Každá sieť s aspoň dvomi políčkami teda obsahuje nejakú nulu. Môže ich mať aj viac, dokonca môže byť celá vyplnená nulami. Vďaka prvému pravidlu sú susedia núl iba jednotky a nuly. Takže ak máme všetky nuly, tak jednotky sú tiež určené. Susedia jednotiek môžu byť dvojky, jednotky a nuly. Takže ak už v sieti máme všetky nuly a jednotky, tak dvojky sú tiež jednoznačne určené. Podobne, ak máme už určené všetky čísla po k vrátane, tak všetky $k+1$ sú nimi určené. Začnime nulami a pozrime sa, či už nám to určí celú tabuľku.

Najprv zistime, kde všade môžu byť nuly. No všade. Musí tam byť aspoň jedna a najviac všetky. To je dohromady $2^{mn} - 1$ možností. Pre každé z mn polí máme 2 možnosti — buď tam nula je alebo nie je. Zo všetkých možností potom musíme odpočítať možnosť, keď nie je žiadna nula.

[2] `http://files.dokazy.webnode.sk/200000004-9d3329e2ca/Permuta%c4%8dn%c3%a1%20nerovnos%c5%a5.pdf` (Pozor! Časť „iné znenie“ obsahuje chybný zápis), `https://en.wikipedia.org/wiki/Rearrangement_inequality`

Keď už máme dané rozloženie núl, tak tabuľka je celá určená. Ďalšie nuly doplniť nemôžeme, tie už sú predsa určené. Na nenulové políčka susediace s nulami dáme jednotky, z prvého pravidla vieme, že iné číslo tam byť nemôže. Iné jednotky tam nebudú, lebo vďaka druhému pravidlu musí mať jednotka za suseda 0. Na nevyplnené políčka susediace s jednotkami dáme 2. Inde dvojky nebudú, lebo tie musia mať za suseda 1. A zase iné čísla na ich mieste byť nemôžu, lebo za suseda majú 1. Takto postupne doplníme čísla 3, 4 . . . , až kým nebude tabuľka plná.

Podľa toho, ako to vypĺňame vidno, že dostaneme záhradu. Každé číslo má susedov s rozdielmi najviac 1 a okrem núl má každé menšieho suseda. Treba si však uvedomiť, že je to zároveň jediný spôsob, akým sa dá tabuľka tými číslami vyplniť. Zase to vieme skontrolovať od najmenších čísel. Všetky jednotky sú tam, kde môžu byť a inde byť nemôžu (lebo by nemali za suseda 0) a zároveň na ich mieste nemôže byť iné číslo (lebo by mali za suseda 0). Rovnako s ostatnými, teda k je na všetkých neobsadených miestach vedľa $k-1$, nesusedí s menším číslom, lebo tí susedia boli obsadení skôr a na miestach pre k nemôže pribudnúť iné číslo, lebo najmenší sused bude $k-1$.

Z núl tak vieme odvodiť celú tabuľku. Zároveň je to jediný spôsob ako tabuľku s tými nulami vyplniť, teda možností je $2^{mn}-1$ pre sieť s aspoň 2 políčkami a nekonečno pre sieť s jedným.

Úloha č. 10: *Mr. Miro (čítaj majro) uviazol v zápche. Aby si spríjemnil čakanie, zamyslel sa nad nasledujúcou geometrickou úlohou.*
V trojuholníku ABC ($|AC| > |AB|$) sa vpísaná kružnica so stredom v bode I dotýka strany BC v bode D. Nech M je stred strany BC. Dokážte, že kolmice z bodov M, D postupne na priamky AI, MI a výška trojuholníka ABC na stranu BC sa pretínajú v jednom bode.

Riešenie: (opravoval Pedro)

Chceme ukázať, že nejaké tri priamky sa pretínajú v jednom bode. Na to máme v geometrii niekoľko možností. Jednou z nich je, že dve z troch priamok nakreslíme podľa definície z úlohy, tretiu dokreslíme tak, aby sa pretínala v jednom bode so zvyšnými dvomi a ukážeme, že táto priamka má definičné vlastnosti zo zadania úlohy, čím vlastne ukážeme, že je to tá priamka zo zadania.

Inou možnosťou je (v úlohách, kde sa to hodí), že dve priamky nakreslíme podľa definičných vlastností a potom z nejakých dvoch bodov o ktorých vieme, že ležia na tretej priamke vedieme úsečky do prieniku pôvodných dvoch priamok a o týchto úsečkách ukážeme, že zvierajú priamy uhol, teda že sú v skutočnosti priamka.

Ďalšou možnosťou je, že všetky tri priamky zoberieme podľa definície zo zadania a ukážeme o nich, že sú to nejaké významné tri priamky, trebárs nejaké špeciálne priamky v nejakom trojuholníku. Výhodou tejto metódy je, že sa väčšinou nemusíme zaoberať samotným priesečníkom, ale iba tými priamkami a zvyškom obrázka (to, že ten priesečník je len jeden nám už totiž samo vyplynie z toho, že tie tri významné priamky trojuholníka sa zo známych dôvodov pretínajú v jednom bode). Túto metódu je vhodné použiť v rôznych prípadoch, špeciálne ju však odporúčame skúsiť vtedy, keď definície priamok zo zadania nápadne pripomínajú definície nejakých troch významných priamok v trojuholníku. Čiže napríklad teraz. Všetky tri priamky sme mali definované ako kolmice na nejakú inú priamku, čo sa podobá definíciam výšok v trojuholníku. Preto, ak by sa nám podarilo nájsť vhodný trojuholník a dokázať, že v tomto trojuholníku sú dané tri priamky výškami, mali by sme vyhraté. Poďme na to.

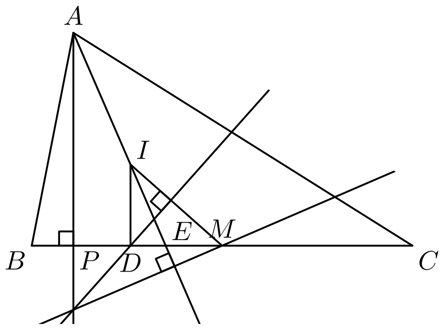
Potrebujeme teda nájsť trojuholník, v ktorom by sa nám dobre dokazovalo, že dané tri priamky sú jeho výšky. Označme pätu výšky z bodu A na priamku BC ako P. Priamka AP je výškou trojuholníka ABC, čo je mimoriadne známa a dobre spracovateľná priamka, preto by sa nám hodilo, aby nami zvolený trojuholník mal túto výšku už danú z definície. Preto jeden z vrcholov trojuholníka by mal ležať na tejto výške a jedna zo strán trojuholníka by mala ležať na priamke BC.

Na priamke BC sú aj body D a M, body z ktorých idú priamky v zadaní, preto sa nám ponúka možnosť zvoliť ako dva vrcholy nášho trojuholníka tieto dva body. Označme si X priesečník priamok MI a AP. Keby bol bod X tretím vrcholom nášho trojuholníka, mali by sme dve výšky hneď zadarmo — výšku AP a tiež kolmicu z bodu D na priamku MI, pretože tie už zo zadania sú kolmé na priamky určené našim trojuholníkom. O tretej priamke vieme, že je to kolmica z bodu M na priamku AI, no my potrebujeme ukázať, že je to zároveň kolmica na priamku XD. Na to by nám stačilo, aby priamky XD a AI, resp. AE, kde E je priesečník priamky AI so stranou BC, boli rovnobežné.

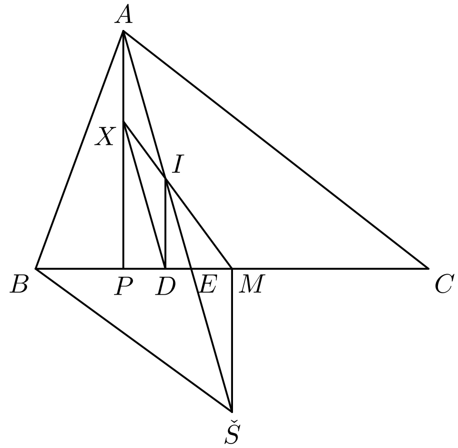
Prečo? Ak priamka pretína dve iné priamky, tak s nimi zviera rovnaký uhol práve vtedy, keď sú dané priamky rovnobežné (teda ak neberieme do úvahy prípad, že by s jednou zvierala uhol „do jednej strany“ a s druhou „do druhej“, čo však práve pri pravom uhle stráca na relevantnosti). Teda z rovnobežnosti priamok XD a AI a z toho, že skúmame kolmicu z bodu M na priamku AI už bude vyplývať aj kolmosť na priamku XD.

Trojuholníky MDI a MPX sú podobné (ba čo viac rovhoľahlé podľa bodu M) a priamky XD a IE sú vedené z k sebe prislúchajúcich bodov. Ak by sme teda ukázali, že k sebe prislúchajúce strany MD a MP sú nimi delené v rovnakom pomere, tak z rovnoľahlosti by vyplývala ich rovnobežnosť. Našim novým cieľom je teda ukázať rovnosť

$$\frac{|PD|}{|PM|} = \frac{|DE|}{|DM|}.$$



Obr. 5



Obr. 6

Zaujímavé je, že týmto krokom sme sa vlastne akoby „zbavili“ našej pôvodnej úlohy a máme dokázať niečo už iba o veľmi známych bodoch v trojuholníku. Čisto teoreticky by sme oddiaľto mohli postupovať čistým vyjadrovaním, keďže dĺžky všetkých štyroch úsečiek sú ľahko vyjadriteľné pomocou známych vzorcov. My ale budeme pokračovať v syntetickom riešení.

Teraz prichádza trochu tricky časť, ale nie zas až tak veľmi. Všimnime si, že ak by sme robili kolmice na priamku BC v bodoch P, D, E a M, dostali by sme dosť fajné priesečníky s priamkou AI (teda osou uhla). Pre bod P je to bod A, pre bod D je to bod I, bod E ostáva a pre bod M to nie je nič iné, ako bod $\check{S}$, teda Švrčkov bod! Čo takto naše body na ne sprojektovať?

Prečo takéto niečo spraviť? Ak si všimneme, aké pekné body tým dostaneme, máme na to až dva veľmi dobré dôvody. Prvý je, že tak šikovne využijeme definície tých bodov. Teda napríklad sa konečne zbavíme ťarchy bodu M, s ktorým sa vždy tak zle pracuje, lebo jediné, čo o ňom vieme je, že leží v strede strany a to je často dosť málo. Takto budeme mať oveľa „šikovnejší“ bod $\check{S}$, ktorý je zo syntetického hľadiska priam dokonalý na používanie. Druhým dôvodom, prečo takéto niečo spraviť je, že vzdialenosť ľubovoľných dvoch bodov na priamke BC sa ich „sprojektovaním“ na priamku AI (projekcia nie kolmá na AI, ale na BC) prenesie na vzdialenosť nových dvoch bodov, ktorá bude konštantným násobkom pôvodnej vzdialenosti. Teda inak povedané, ak chceme dokázať rovnosť pomerov $|PD|/|PM| = |DE|/|DM|$, je to to isté, akoby sme chceli ukázať rovnosť pomerov

$$\frac{|AI|}{|A\check{S}|} = \frac{|IE|}{|I\check{S}|}.$$

Táto rovnosť je o niečo príjemnejšia, lebo v nej vystupujú krajšie body. Tú si môžeme upraviť na podobnú rovnosť $|I\check{S}|/|A\check{S}| = |IE|/|AI|$. Teraz využijeme bod I. Je to stred vpísanej kružnice, preto leží na osiach uhlov. V trojuholníku AEC je to dokonca priesečník osi uhla ACE s priamkou AE. O takýchto priesečníkoch vieme, že ležia na svojich stranách v špeciálnom pomere. Konkrétne $|IE|/|AI| = |EC|/|CA|$.

Pozrime sa teraz na druhý zlomok nami dokazovanej rovnosti. Teda $|I\check{S}|/|A\check{S}|$. Menej známou, ale mimoriadne užitočnou vetou súvisiacou so Švrčkovým bodom je tzv. veta o trojprste, ktorá hovorí, že $|\check{S}I| = |\check{S}C| = |\check{S}B|$ pri našej konfigurácií bodov. Využijeme rovnosť $|\check{S}I| = |\check{S}B|$ a zlomok $|I\check{S}|/|A\check{S}|$ je teda rovný $|B\check{S}|/|A\check{S}|$. Potrebujeme teda dokázať, že $|B\check{S}|/|A\check{S}| = |EC|/|AC|$. Táto ale už vyplýva z podobnosti trojuholníkov $B\check{S}A$ a ECA. Tie sú podobné preto, lebo jednak $|\sphericalangle CAE| = |\sphericalangle EAB|$, lebo AE je osou uhla BAC, a dvak preto, že $|\sphericalangle B\check{S}A| = |\sphericalangle BCA|$, čo zas vyplýva z toho, že sú to obvodové uhly k tetive AB kružnice opísanej trojuholníku ABC (na ktorej, ako vieme, $\check{S}$ leží). Tým by sme mali úlohu dokázanú.

<u>Výsledková listina</u>

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
1.	Dávid Mišiak	2	GJH	4	9	9		9	9	9		45
2.	Marián Poturnay	2	GPiešť	4	8	9	9	9	9			44
3.	Pavol Kollár	2	GAMČA	5		9	9	8	9	8		43

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	∑
	Tomáš Sásik	3	GAMČA	8			9	7	9	9	9	43
	Samuel Krajči	2	GAlKE	5		9	8	9	9	8		43
6.	Martin Števko	2	GAlKE	4	9	9	7	7	9			41
	Radek Olšák	2	Iná škola	3	8	9		7		8	9	41
8.	Jakub Pravda	1	ŠpMNDaG	2	9	9	6	7	9			40
9.	Pavol Kebis	2	GJH	4	9	9	2	9	9	3		39
10.	Ákos Záhorský	3	GŠahy	7		9		8	9	8	4	38
11.	Lucia Krajčoviechová	1	GJH	3	8	9	2	9	9			37
12.	Richard Oravkin	2	GBajkBA	4	9	9		9		8		35
	Tereza Prokopová	2	GJH	4	9	9		8	9			35
	Peter Onduš	3	ŠpMNDaG	6		9	3	6	9	8		35
15.	Jakub Parada	1	GAMČA	3	9	9		7	9			34
	Filip Čermák	3	Iná škola	3	9	9		7	9			34
	Monika Machalová	2	GJH	4	9	9		7		9		34
18.	Michal Horanský	1	ŠpMNDaG	2	5	3		8	9	8		33
	Matej Moško	2	GAMČA	4	9	9	2	4	9			33
	Viktória Brezinová	2	GAlKE	4	9	9	6		9			33
21.	Miška Dlugošová	3	GKuPP	7		7	5	9	9			30
	Štefánia Glevitzká	2	GPriev	4	9	9	3	9				30
23.	Peter Ralbovský	4	GJH	11			2	9	9	8		28
	Mária Ďuračková	2	GJH	4	8	9		3		8		28
25.	Jakub Poljovka	3	GPárNT	7		9		9	9			27
	Lukáš Baláž	2	GBánov	3	9	9			9			27
	Michal Staník	2	GĽŠTN	4	9	9	1		8			27
	Martina Kalašová	2	GJH	3	9	6		9			3	27
	Jozef Fülöp	1	GAMČA	3	9	9			9			27
30.	Michaela Ždímalová	2	GJH	3	2	9		6	9			26
	Daniel Magula	3	GPiaNT	4	8	9	2	5		2		26
	Juraj Rosinský	2	I de Lancy	3	8	9		7	2			26
	Nina Benková	2	GPiešť	4	8	9	2	7				26
34.	Michal Mráz	2	ŠpMNDaG	4	9	9		6	0			24
35.	Jonáš Dujava	2	SPlPO	4		9		3	9			21
	Jaroslav Paška	2	ŠpMNDaG	3	9	9	2			1		21
37.	Michal Molnár	2	GAMČA	4	9	9	2					20
38.	Jozef Číž	2	GJH	4	9	9						18
39.	Matúš Zubčák	2	GPárNT	4	9	8						17
	Veronika Ganzová	3	GMerTT	4	9	3		5				17
41.	Pavol Klein	2	GPiešť	4	7	9						16
42.	Karolína Pisoňová	2	GBánov	4	9	4						13
43.	Jana Černíková	2	GJH	3	7	3			0			10
44.	Kristina Galikova	2	ŠpMNDaG	4	3	4						7
45.	Lucia Ondovčíková	2	GModra	4	1	3			0	0		4

kategória ALFA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	1	2	3	4	5	6	7	∑
1.	Miro Macko	1	Leaf	2		9	9	8	9	9	7	44
2.	Eliška Macáková	6zš	SZScenada	-3	8	9	8	9	9	3	4	43
3.	Barbora Barančíková	1	ŠpMNDaG	2		9	9	9	8		7	42
4.	Matej Priesol	1	ŠpMNDaG	2		9	9	9	9		5	41
5.	Michal Kajan	1	GBajkBA	2	9	9	9	9	8	2	5	40
6.	Jakub Pravda	1	ŠpMNDaG	2		5	7	9	9	6	7	38
7.	Lucia Krajčoviechová	1	GJH	3			9	8	9	2	9	37
	Martin Starovič	1	GAMČA	2		9	6	9	7	6		37

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	$\sum$
	Róberta Juríková	2	Iná škola	3			9	9	9	3	7	37
10.	Michal Masrna	1	GPošKE	2		9	9	9	9			36
11.	Kristína Grolmusová	1	BiGSuč	1	8	9	6	1	9	2	2	34
12.	Erik Řehulka	1	ŠpMNDaG	2		9	3	7	8		5	32
13.	Timea Szöllősová	1	GAMČA	1	4	9	9	9	0			31
	Jitka Muravská	1	GAMČA	1	4	9	9	9	0			31
15.	Filip Csonka	2	GAlKE	2		9	9	9	3			30
	Lukáš Gáborik	9zš	ZSRadBB	0	6	9	3	9	3			30
	Matej Hanus	1	GPošKE	2		9	9	9	3			30
18.	Tatiana Matejkova	1	GPárNT	2		3	9	9	8			29
	Patrik Rusnák	1	GAlKE	2		9	9	1	9		1	29
20.	Ondrej Tomasik	1	Iná škola	1	5	9	9		3		2	28
21.	Tomáš Ganz	1	ŠpMNDaG	2		3	4	8	7		5	27
	Matej Vojtek	1	GAMČA	2		9	9	9	0			27
	Andrej Pečimúth	3	GNZám	1			9	9	9			27
24.	Kornélia Nemcová	1	GAMČA	2		9	1	9	3		4	26
	Marianna Hronská	9zš	BiGSuč	1			9	9	8			26
26.	Jakub Parada	1	GAMČA	3				9	9		7	25
	Filip Čermák	3	Iná škola	3				9	9		7	25
	Alex Chudíc	1	ŠpMNDaG	2			6	9	8	2	?	25
29.	Juraj Rosinský	2	I de Lancy	3				8	9		7	24
	Martina Kalašová	2	GJH	3				9	6		9	24
	Martin Koutenský	1	GAMČA	2	7	9	6	9	0			24
	Radek Olšák	2	Iná škola	3				8	9		7	24
33.	Tomáš Šumšala	1	GJH	2		9	3	2	9			23
	Gabriela Šavelová	1	GAMČA	2		9	5	9	0			23
35.	Adam Barla	1	GTajBB	1	7	9	3		3			22
36.	Jasmína Portašiková	2	GVarZA	3			9	1	9		2	21
37.	Jaroslav Paška	2	ŠpMNDaG	3				9	9	2		20
38.	Adam Kuniak	1	GAMČA	1	7	9	3		0			19
39.	Lukáš Baláž	2	GBánov	3				9	9			18
	Tomáš Šimek	9zš	ŠpMNDaG	0	9			9				18
	Jozef Fülöp	1	GAMČA	3				9	9			18
42.	Michaela Ždímalová	2	GJH	3				2	9		6	17
	Jakub Hluško	2	ŠpMNDaG	2		9		8				17
44.	Jana Černíková	2	GJH	3			6	7	3			16
	Marek Tran	1	GAMČA	2		9	3	4	0			16
	Michal Horanský	1	ŠpMNDaG	2				5	3		8	16
47.	Alžbeta Jurečeková	2	ezsmt	3			4	0	1	3	7	15
48.	Tánička Bielaková	1	GAMČA	2		9	0	1	2		2	14
	Alexandra Géciová	1	GJH	1	5	3	3	0	3			14
50.	Ema Hartmannová	2	GPriev	2		4	3	0	1	4	1	13
51.	Natalia Calvo	1	GPárNT	2		2	5		3			10
52.	Matúš Tamáši	2	Iná škola	2					9			9
	Karin Demková	1	GJH	2		9		0	0			9
54.	Andrej Genčur	1	Iná škola	2	5	8						8
55.	Andrej Bederka	2	ŠpMNDaG	2				1	3	1		5
	Anežka Pajunková	1	Iná škola	2				1	3		1	5
57.	Jana Viktória Kováčiková	3	Iná škola	3			4					4
	Natália Grigová	1	GAMČA	1		4						4
59.	Michal Vranovský	1	GCSLewis	2			0			1	1	2