Vzorové riešenia 2. série letnej časti KMS 2016/2017

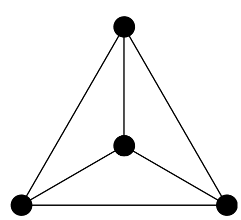
Úloha č. 1: *Alžbetka si doniesla na ihrisko kriedy. Bielou kriedou si nakreslila na ihrisko n bodov. Potom niektoré dvojice bodov spojila bielou čiarou tak, aby sa čiary nepretínali inde, ako v nakreslených n bodoch. Nakoniec zobrala tri farebné kriedy a rozhodla sa, že každý z n bodov, čo nakreslila na začiatku, vyfarbí jednou farbou. Vyfarbuje ich však tak, aby každé dva body, ktoré sú spojené čiarou, mali rôznu farbu. Avšak za žiadnu cenu sa Alžbetke nepodarilo takto zafarbiť všetky body. Nájdite najmenšie kladné celé číslo n, pre ktoré sa to mohlo Alžbetke stať. Ako napríklad mohli vyzerať body a čiary, ktoré na začiatku nakreslila? Prečo sa jej to nemohlo stať pre menšie n?*

Riešenie: (opravovala Iveta)
Keďže hľadáme najmenšie kladné n, predstavme si situáciu pre malé kladné čísla. Pre $n = 1$ máme iba jeden bod, ktorý nemáme s čím spojiť, teda nemáme žiadne čiary. Takže neplatí, že by nejaká čiara mala oba konce rovnakej farby.

Pre $n = 2$ máme dva body, vieme ich spojiť čiarou. Môžeme však použiť 3 rôzne farby, preto stačí, ak každý zafarbíme inou farbou.

Pre $n = 3$ môžeme znovu zafarbiť každý bod inou farbou, teda aj keby sme spojili každý vrchol s každým, žiadna čiara nebude mať rovnaké konce. Čo sa však stane, ak je počet bodov väčší než počet farieb?

Vezmime $n = 4$ a spojme každý bod s každým tak, ako na obrázku 1. Museli sme sa trochu potrápiť, aby sa nám to podarilo bez kríženia čiar. Zafarbime nejaký prvý bod nejakou farbou, napr. modrou. Teraz druhý bod je spojený s každým, teda aj s prvým, preto musí mať inú farbu, povedzme, že červenú. Tretí bod je tiež spojený s oboma predchádzajúcimi, teda musí mať tretiu farbu, napríklad zelenú. Štvrtý bod je ale tiež spojený so všetkými prechádzajúcimi bodmi, takže musí mať inú farbu. Môžeme ale použiť iba 3 farby, takže štvrtý bod bude mať iste rovnakú farbu ako niektorý z predchádzajúcich, teda čiara, ktorá ich spája, má oba konce rovnakej farby. Najmenšie možné n je teda 4.



Obr. 1

Úloha č. 2: *Adam, Braňo a Cyril hrajú futbal. Avšak v trojici sa hrá zle, ak každý chce byť brankárom. Preto si chlapci vymysleli nasledovný systém: Dvaja hráči hrajú proti sebe, útočia na jednu bránku, kde chytá tretí hráč. Kto strelí gól, vymení sa s terajším brankárom. Keď ich to prestalo baviť, uvedomili si, že Adam odkopal (nebol v bráne) 12 minizápasov, Braňo odkopal 21 minizápasov a Cyril odchytal v bráne 8 minizápasov. Je možné zistiť len z týchto čísel, kto strelil šiesty gól?*

Riešenie: (opravovala Veronika)
Poďme zistiť, koľko minizápasov chalani celkovo odohrali. Cyril odchytal v bráne 8 minizápasov, teda Adam a Braňo hrali proti sebe 8-krát. Adam a Cyril hrali proti sebe $12 - 8 = 4$ minizápasy, zatiaľ čo bol Braňo v bránke. Braňo a Cyril hrali proti sebe $21 - 8 = 13$ minizápasov, zatiaľ čo v bránke chytá Adam. Zápasov bolo celkovo $8 + 13 + 4 = 25$. Naše zistenia si prehľadne napíšeme do tabuliek.

Kedže sa hráči po góle vždy vystriedajú, tak nemôže byť jeden z hráčov dvakrát za sebou v bránke. Koľko najviac minizápasov by mohol byť jeden hráč v bránke? Každý druhý minizápas. Ak by v bránke začínal, bol by tam

	odkopal	odchytal
Adam	12	13
Braňo	21	4
Cyril	17	8

počet zápasov	odkopali	odchytal
8	Adam, Braňo	Cyril
13	Braňo, Cyril	Adam
4	Adam, Cyril	Braňo

1., 3., 5., ..., 25. zápas, čo je dokopy 13 zápasov. Ak by bol v bránke každý párny minizápas, čiže 2., 4., 6., ..., 24. minizápas, čo je dokopy 12 zápasov.

Keď sa pozrieme do tabuľky, vidíme, že Adam bol v bránke 13-krát, čiže bol v bránke každý nepárny minizápas. Adam teda musel streliť gól v každý párny minizápas, aby sa dostal naspäť do bránky.

Ukázali sme si, že je možné zo zadania zistiť, kto strelil šiesty gól. Strelcom šiesteho gólu bol Adam.

<u>Úloha č. 3:</u> *Marek sa nerád hrá futbal, tak sa zabával redukovaním čísel. Prirodzené číslo vieme zredukovať, ak ho môžeme bezo zvyšku predeliť jeho poslednou cifrou. Nájdite všetky čísla, ktoré vieme zredukovať na číslo 1. Nezabudnite zdôvodniť, že ste naozaj našli všetky čísla. (Môžeme použiť redukciu aj viackrát.)*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Kika a Marián)

Aby sme nemuseli stále vypisovať, že nejaké číslo sa dá zredukovať na číslo 1, budeme takéto číslo skrátene volať *zredukovateľné*. Teda našou úlohou je nájsť všetky zredukovateľné čísla.

Jednociferné čísla sú zredukovateľné, pretože číslo po predelení samým sebou je 1. Ak vieme číslo zredukovať na jednociferné číslo, tak ho následne vieme zredukovať aj na jednotku. Ak číslo má poslednú cifru 1, tak redukovaním dostávame to isté číslo. Teda jediné zredukovateľné číslo s poslednou cifrou 1 je práve číslo 1. Neexistuje prirodzené číslo deliteľné nulou, preto čísla s poslednou cifrou 0 nevieme redukovať. Ostávajú nám tak čísla, ktoré majú aspoň dve cifry a nekončia sa cifrou 0 ani 1.

Pozrime sa najprv, čo sa deje pri redukovaní. Zoberme si číslo x s poslednou cifrou a. Označme si číslo, ktoré vznikne po zredukovaní x ako y. Teda $y = x/a$ alebo po prenásobení $a \cdot y = x$. Aby táto rovnosť platila, musí mať súčin $a \cdot y$ poslednú cifru rovnú a. Označme si poslednú cifru čísla y ako b. Zjavne čísla $a \cdot y$ a $a \cdot b$ majú rovnakú poslednú cifru.

Nájdime teraz všetky dvojice cifier (a, b), pre ktoré má súčin $a \cdot b$ poslednú cifru a a obe cifry sú rôzne od nuly a jednotky. Napríklad to môžeme spraviť tak, že najprv pre $a = 2$ nájdeme všetky vyhovujúce cifry b, potom pre $a = 3$ atď. Nájdeme tak nasledovné dvojice (a, b) (vždy na prvom mieste je a a na druhom b):

$$(2,6),\ (4,6),\ (6,6),\ (8,6),\ (5,3),\ (5,5),\ (5,7),\ (5,9).$$

Poďme teraz rozobrať jednotlivé možnosti.

Začneme najprv s jednoduchším prípadom. Zoberieme si aspoň dvojciferné číslo x s poslednou cifrou $a = 6$, ktoré je zredukovateľné. Jediná dvojica (a, b), kde $a = 6$, je dvojica $(6, 6)$. Preto redukovaním takéhoto čísla x získame číslo končiace cifrou 6, ktoré je tiež zredukovateľné. Ak budeme redukcie opakovať, tak stále budeme dostávať zredukovateľné čísla končiace šestkou. Nakoniec dostaneme jednociferné číslo 6, ktoré zredukujeme na 1. Ak sa na tento proces pozrieme od konca, tak číslo 1 sme násobili niekoľko krát šiestimi. Preto všetky zredukovateľné čísla, ktoré majú poslednú cifru 6, sú tvaru 6^k pre nejaké kladné celé číslo k (zahrnuli sme sem už aj jednociferné číslo 6).

Ďalej si zoberme zredukovateľné číslo $x \geq 10$ s poslednou cifrou $a = 2$. Opäť z nášho zoznamu dvojíc vidíme, že jediné vyhovujúce b je $b = 6$. Preto redukovaním čísla x dostaneme zredukovateľné číslo y končiace cifrou 6. Tieto čísla sme už však našli, preto $y = 6^k$ pre nejaké celé kladné číslo k. Číslo x získame z čísla y vynásobením $a = 2$, a teda x musí byť v tomto prípade tvaru $2 \cdot 6^k$. Rovnakým spôsobom zistíme, že jediné zredukovateľné čísla končiace cifrou 4, resp. 8 sú čísla tvaru $4 \cdot 6^k$, resp. $8 \cdot 6^k$.

V našom zozname dvojíc (a, b) sa nenachádza dvojica, kde by a bolo nejaké z čísel 3, 7 alebo 9. Preto neexistuje žiadne zredukovateľné číslo, ktoré má aspoň dve cifry a končí cifrou 3, 7 alebo 9.

Ostáva nám teda posledný prípad, a to prípad, kedy zredukovateľné číslo $x \geq 10$ končí na cifru $a = 5$. Z nášho zoznamu vidíme, že po zredukovaní čísla x dostaneme číslo končiace cifrou 3, 5, 7 alebo 9. Avšak už vieme, že jediné zredukovateľné čísla končiace na 3, 7 alebo 9 sú 3, 7 a 9. V taktom to prípade naše redukovanie končí. Ak po redukcii čísla x dostaneme číslo končiace cifrou 5, sme v rovnakej situácii, ako na začiatku. Teda v tomto prípade vyzerá redukovanie tak, že ich najprv delíme piatimi, kým to ide. Nakoniec sa dopracujeme buď k číslu 5 a následne 1, alebo k číslu 3, 7 alebo 9, z ktorého jednou redukciou dostaneme číslo 1. Ak sa ne tento proces pozrieme spätne, tak najprv jednotku vynásobíme číslom 3, 5, 7 alebo 9 a potom ho len násobíme piatimi. Teda získavame tak zredukovateľné čísla tvarov $3 \cdot 5^k$, 5^k, $7 \cdot 5^k$ a $9 \cdot 5^k$ pre nejaké kladné celé číslo k.

Jendociferné čísla sme vyriešili zvlášť a pri viacciferných číslach sme rozobrali všetky možnosti poslednej cifry. Všetky zredukovateľné čísla teda sú čísla tvarov $2 \cdot 6^k$, $3 \cdot 5^k$, $4 \cdot 6^k$, 5^k, 6^k, $7 \cdot 5^k$, $8 \cdot 6^k$, $9 \cdot 5^k$, kde k je nezáporné celé číslo. Všimnite si, že tento zápis zahŕňa aj všetky jednociferné čísla, stačí si zvoliť $k = 0$, resp. $k = 1$. Zo spôsobu, akým sme ich našli, vyplýva, že všetky tieto čísla naozaj vieme zredukovať na číslo 1.

Úloha č. 4: *Kristínka si od svojej mladšej sestry Alžbetky požičala kriedy troch farieb. Po hodine vytrvalého kreslenia nimi zafarbila*[1] *celý betónový štvorec so stranou dĺžky* 1 m. *Dokážte, že v zafarbenom štvorci existuje dvojica bodov* P, Q *rovnakej farby, ktorých vzdialenosť je väčšia ako* 1,00778 m.

Riešenie: (opravovali Adam a Mojo)
Chceme dokázať, že v každom takomto štvorci existuje dvojica bodov P, Q rovnakej farby, ktorých vzdialenosť je väčšia ako 1,00778 m. Môžeme to spraviť napríklad tak, že dokážeme, že štvorec, kde by všetky dvojice bodov rovnakej farby boli od seba vzdialené nanajvýš 1,00778 m neexistuje (dôkaz sporom).

Prvá vec, ktorá hneď väčšinu z vás napadla bola, že keď máme tri farby a štyri vrcholy štvorca, aspoň dva vrcholy budú mať rovnakú farbu. Ak by malo existovať nejaké vyfarbenie štvorca, ktoré by odporovalo zadaniu, musia byť tieto dva vrcholy susedné. Keby totiž boli oproti sebe, teda spájala by ich uhlopriečka, boli by od seba vzdialené $\sqrt{2}$, čo je viac ako $1,00778$.

Tieto dva susedné vrcholy s rovnakou farbou si môžeme napríklad označiť A a B, a povedzme, že ich farba je modrá. Keď chceme zistiť, kde všade ešte môžu byť modré body, nakreslíme si z bodov A aj B kružnice s polomerom $1,00778$. Body mimo ich prieniku zjavne nemôžu byť modré, lebo by aspoň od jedného z bodov A alebo B boli ďalej ako $1,00778$. Označme si prieniky týchto kružníc so stranami štvorca AD a BC postupne ako K a L.

Teraz si vieme jednoducho vyrátať dĺžky úsečiek AK a BL, keďže sú to odvesny pravouhlého trojuholníka s druhou odvesnou dĺžky 1 (strana AB) a preponou dĺžky $1,00778$ (polomer našich kružníc). Z Pytagorovej vety bude

$$|AK| = |BL| = \sqrt{|BK|^2 - |AB|^2} = \sqrt{1,00778^2 - 1^2} \approx 0,124982.$$

Toto číslo nie je príliš pekné a zle by sa nám s ním počítalo ďalej. My ho však ani nepotrebujeme presné, môžeme si ho zaokrúhliť na $0,125$, čo si vieme zapísať ešte krajšie ako $\frac{1}{8}$. Dôležité je, že sme zaokrúhlili nahor, a teda bod ktorý bude ležať na AD a od bodu A bude vzdialený $\frac{1}{8}$, bude ešte o kúsok ďalej aj od bodu B.

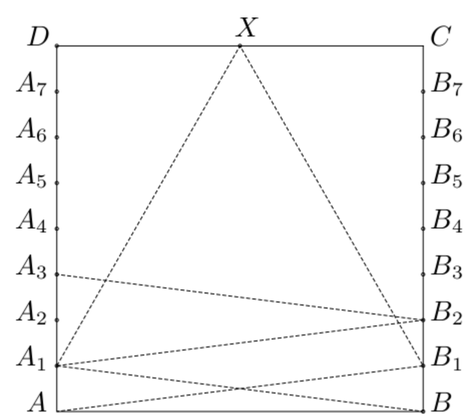
Túto vzdialenosť budeme používať aj ďalej, na stranách AD a BC si vyznačíme body A_1, A_2, A_3, ..., A_7 a B_1, B_2, B_3, ..., B_7, tak, že sa nachádzajú v osminách oboch strán (teda $AA_1 = \frac{1}{8}$, $AA_2 = \frac{2}{8}$, ..., $AA_7 = \frac{7}{8}$). Len pre kontrolu, dĺžka úsečiek AB_1 a BA_1 bude

$$|AB_1| = |BA_1| = \sqrt{1^2 + \frac{1}{8}^2} = \frac{1}{8}\sqrt{65} \approx 1,0077822185,$$

čiže o kúsok viac ako $1,00778$.

Z toho jednoznačne vyplýva, že body A_1 a B_1 budú mať určite iné farby ako A, B. Teraz máme dve možnosti.

(1) Body A_1 a B_1 majú rovnakú farbu, povedzme, že červenú. Teraz sa môžeme pozrieť na body A_2 a B_2. A_2 má znovu vzdialenosť od B_1 rovnú $\frac{1}{8}\sqrt{65}$, čiže nemôže byť červený. Zároveň, vzdialenosť od B je ešte väčšia (je celkom zrejmé prečo), takže nemôže byť ani modrý. Bude teda zelený. Rovnakou úvahou, len symetricky otočenou, dôjdeme k tomu, že aj B_2 musí byť zelený, lebo žiadna iná farba nám už nezostáva. Fajn, doteraz nám to sedelo, skúsme teda pokračovať. Bod A_3 znova nemôže byť zelený kvôli bodu B_2, červený kvôli B_1 a modrý kvôli B. Keďže máme k dispozícií len tri farby, A_3 nemôže mať ani jednu z nich a každý bod musí byť ofarbený, prichádzame k sporu.



(2) Body A_1 a B_1 majú rôzne farby, napríklad A_1 je červený a B_1 zelený. Teraz si pomôžeme bodom X, ktorý umiestnime do stredu CD. Vzdialenosť od oboch bodov k bodu X bude kvôli symetrií rovnaká a znovu ju vieme jednoducho vypočítať pomocou Pytagorovej vety:

$$|A_1X| = |B_1X| = \sqrt{|A_1D|^2 + |DX|^2} = \sqrt{\frac{7}{8}^2 + \frac{1}{2}^2} = \frac{1}{8}\sqrt{65}.$$

Z toho nám vyplýva, že bod X nemôže byť ani červený ako A_1, ani zelený ako B_1 a nakoniec ani modrý ako A a B. Týmto ho ale dostávame do rovnakej nepríjemnej pozície, v akej bol bod A_3 v predchádzajúcom prípade, a nás dostávame k druhému sporu.

V oboch prípadoch sme narazili na spor, dokázali sme teda, že neexistuje také vyfarbenie štvorca, kde by žiadne dva body s rovnakou farbou neboli od seba ďalej ako 1,00778 m, čím sme vlastne dokázali tvrdenie zo zadania.

Úloha č. 5: *Ivetka si zabudla formičky do piesku, tak jej neostalo nič iné, ako sa hrať s logaritmami.*[2] *Dokážte, že pre všetky trojice reálnych čísel* a, b, c *väčších ako 1 platí:*

$$\log_a(bc) + \log_b(ca) + \log_c(ab) \geq 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b).$$

[1] Teda každý bod štvorca (vrátane vnútorných) je zafarbený práve jednou z troch farieb.

[2] $\log_x y$ je také reálne číslo z, pre ktoré platí $x^z = y$. Viac o logaritme ako aj jeho základné vlastnosti sa môžete dozvedieť napríklad tu `https://sk.wikipedia.org/wiki/Logaritmus`.

Riešenie: (opravovali Juro a Zajo)

Ako prvé je dobré si uvedomiť, ako sa dá pracovať s logaritmami. Na uvedenej wiki stránke boli tieto dva vzorčeky, vďaka ktorým si vieme našu nerovnosť upraviť na prijateľnejší tvar:

$$\log_a bc = \frac{\log_q bc}{\log_q a} = \frac{\log_q b + \log_q c}{\log_q a}.$$

Dobrou radou v takýchto príkladoch je upraviť všetky logaritmy na rovnaký základ. Upravme preto všetky logaritmy na nejaký základ väčší ako 1, nemusíme si ani určiť, že presne na aký. Ľavá strana:

$$\log_a bc + \log_b ac + \log_c ab = \frac{\log bc}{\log a} + \frac{\log ac}{\log b} + \frac{\log ab}{\log c} = \frac{\log b + \log c}{\log a} + \frac{\log a + \log c}{\log b} + \frac{\log a + \log b}{\log c}.$$

Potom pravá strana:

$$4(\log_{ab} c + \log_{ac} b + \log_{bc} a) = 4\left(\frac{\log c}{\log ab} + \frac{\log a}{\log cb} + \frac{\log b}{\log ac}\right) = 4\left(\frac{\log c}{\log a + \log b} + \frac{\log a}{\log b + \log c} + \frac{\log b}{\log a + \log c}\right).$$

Spojením strán dostávame takúto nerovnosť:

$$\frac{\log b + \log c}{\log a} + \frac{\log a + \log c}{\log b} + \frac{\log a + \log b}{\log c} \geq 4\left(\frac{\log c}{\log a + \log b} + \frac{\log a}{\log b + \log c} + \frac{\log b}{\log a + \log c}\right)$$

V celej nerovnosti máme len tri rôzne logaritmy, preto si zjednodušme prácu tým, že zavedieme substitúciu $x = \log a$, $y = \log b$, $z = \log c$. Vďaka podmienke zo zadania, vieme že x, y, z sú väčšie ako 0, a teda môžeme beztrestne týmito číslami deliť a násobiť. Vznikne nám takto nová nerovnica

$$\frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} \geq 4\left(\frac{x}{z+y} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{y+x}\right).$$

Jeden zo spôsobov riešenia je úprava nerovnosti na taký tvar, v ktorom budeme môcť použiť AH nerovnosť[3]. Pre dve kladné reálne čísla a_1, a_2 vyzerá následovne:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}.$$

V našom výraze najprv upravíme zlomky na pravej strane do tvaru

$$\frac{x}{z+y} = \frac{1}{\frac{z}{x} + \frac{y}{x}},$$

ktorý sa vyskytuje v AH nerovnosti. Následne obe strany nerovnosti predelíme dvomi, čím dostaneme

$$\frac{\frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x}}{2} \geq 2\left(\frac{x}{z+y} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{y+x}\right).$$

Teraz vidíme, že táto nerovnosť je súčtom troch AH nerovností

$$\frac{\frac{x}{y} + \frac{z}{y}}{2} \geq \frac{2}{\frac{x}{y} + \frac{z}{y}}, \qquad \frac{\frac{y}{x} + \frac{z}{x}}{2} \geq \frac{2}{\frac{y}{x} + \frac{z}{x}}, \qquad \frac{\frac{x}{z} + \frac{y}{z}}{2} \geq \frac{2}{\frac{x}{z} + \frac{y}{z}}.$$

Keď teda tieto tri nerovnosti sčítame, dostávame presne to, čo sme chceli — našu nerovnosť.

Iné riešenie:

Ďalšia dobrá myšlienka bola na začiatku riešenia si zvoliť za q (základ logaritmu, na ktorý upravujeme hodnotu c (alebo a či b). Niektoré členy sa nám tým pádom zmenia na jednotky a strany nerovnice budú vyzerať nasledovne:

$$\log_a bc + \log_b ac + \log_c ab = \frac{\log_c bc}{\log_c a} + \frac{\log_c ac}{\log_c b} + \frac{\log_c ab}{\log_c c} = \frac{\log_c b + 1}{\log_c a} + \frac{\log_c a + 1}{\log_c b} + \log_c a + \log_c b,$$

[3] Ak ste o tejto nerovnosti ešte nepočuli, odporúčame si o nej niečo prečítať na internete. Ako tvorcovia vzoráku odporúčame anglický článok `https://brilliant.org/wiki/power-mean-qagh/`, ale ak by jazyk mal byť prekážkou, dajú sa pohľadať aj české, resp. slovenské materiály.

$$4(\log_{ab} c + \log_{ac} b + \log_{bc} a) = 4\left(\frac{\log_c c}{\log_c ab} + \frac{\log_c a}{\log_c cb} + \frac{\log_c b}{\log_c ac}\right) = 4\left(\frac{1}{\log_c a + \log_c b} + \frac{\log_c a}{\log_c b + 1} + \frac{\log_c b}{\log_c a + 1}\right).$$

Teraz naša nerovnica obsahuje už len dve neznáme a teda pôjde o veľký kus jednoduchšie riešiť roznásobením a rozbitím na čiastkové nerovnosti. Ak by sme ju roznásobili a poodčítavali členy, čo nám ostanú na oboch stranách, dostali by sme len súčet niekoľkých AG-nerovností, s ktorými by sme si už hravo poradili.

Komentár:

Najčastejšia chyba bola v nasledovnej myšlienke. Ak si namiesto $x = \log a$, $y = \log b$, $z = \log c$ zavedieme takúto substitúciu:

$$x = \frac{\log(c) + \log(b)}{\log(a)}, \quad y = \frac{\log(a) + \log(b)}{\log(c)}, \quad x = \frac{\log(b) + \log(c)}{\log(a)},$$

dostaneme tak nerovnosť

$$x + y + z \geq 4(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}).$$

Ďalej, ak túto nerovnicu upravíme, vidíme tam tri čiastkové nerovnosti (tvaru $x - \frac{4}{x} \geq 0$). Ak x, y, z sú aspoň 2, tak tá nerovnosť platí. To je správna úvaha, no bohužiaľ niektorá z neznámych môže byť menšia ako 2. Ak platí celá nerovnosť, tie čiastkové platiť nemusia, na to si treba do budúcna dávať pozor (aj keď opačne to funguje). Viacerí ste svoje riešenie zakončili na tomto kroku, kedy ste tvrdili, že musia byť jednoducho väčšie ako 2, čo ale neplatí.

Úloha č. 6: *Malý Janko sa vozí na kolotoči, ktorý má n sedadiel usporiadaných do kruhu. Vozí sa n jázd. Po každej jazde (okrem poslednej) si presadne v smere hodinových ručičiek o najviac $n-1$ miest. Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré je možné, aby Janko v každej jazde sedel na inom mieste, pričom po každej jazde si presadne o iný počet miest. Nezabudnite zdôvodniť, prečo to pre ostatné n nie je možné.*

Riešenie: (opravovali Katka a Dominik)

V tejto úlohe je dôležité uvážiť, o koľko sedadiel sa celkovo vo všetkých presadnutiach Janko posunie a následne zistiť, či a ako je možné posuny realizovať.

Janko sa presunie zo sedačky na inú po každej z jázd od 1 po $n-1$, vždy o iný počet sedadiel. Z toho vyplýva, že sa musí práve raz presunúť o 1 miesto, práve raz o 2 miesta a takto až po $n-1$ miest. Celkovo sa teda pred n-tou jazdou posunie o

$$1 + 2 + ... + (n-1) = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

sedadiel. Podmienkou v zadaní je, že po $(n-1)$-vej jazde musí Janko sedieť na inej sedačke ako na začiatku. Ukážeme si, že pre niektoré čísla bude sedieť opäť tam, kde začínal (tie budeme môcť vylúčiť).

Rozdeľme si čísla na dve skupiny: nepárne a párne. Pre nepárne n platí, že $\frac{1}{2}(n-1)$ je celé číslo, teda $\frac{1}{2}n\cdot(n-1)$ je celočíselný násobok n. To znamená, že po $(n-1)$-vej jazde by Janko musel nutne sedieť na sedadle, kde začínal. Z toho ale vyplýva, že na jednom z $n-1$ ostatných sedadiel určite nesedel. A to je problém, ak je $n > 1$, pretože nesplníme zadanie. V špeciálnom prípade $n = 1$, zjavne môže sedieť len na jedinom mieste, teda $n = 1$ spĺňa zadanie.

Pre párne n tento problém nevznikne, pretože $\frac{1}{2}(n-1)$ nie je celé číslo. Ukážeme si, že pre párne n Janko dokáže sedieť na kolotoči podľa zadania. Ide to napríklad takýmto spôsobom: Najprv sa Janko posunie o 1 sedadlo, potom o $n-2$, čím sa dokopy dostane o 1 sedadlo proti smeru hodinových ručičiek od toho, kde začínal. Takto sú obsadené sedadlá naľavo aj napravo od počiatočného. Následne Janko pokračuje tak, že obsadí dvojicu miest, ktoré ohraničujú miesta, kde už predtým sedel. Postupne sa tak posúva o 3, $n-4$, 5, $n-6$, … sedadiel a rozširuje tak miesta, na ktorých sedel doľava aj doprava, až kým nepríde k poslednému, na ktoré príde posunom o 2 sedadlá. Zjavne si takto posedí na každom zo sedadiel práve raz. Navyše využije posun každej dĺžky, pretože ak si všimneme, posuny o nepárne čísla pokryje v nepárnych jazdách od 1 až po $n-1$ a posuny o párne čísla zase klesajúcou postupnosťou od $n-2$ až po 2.

A to je všetko, pretože sme si ukázali, že pre párne n a jednotku zadanie splniť vieme a pre nepárne n nie.

Úloha č. 7: *Na ihrisku sú vysadené stromy. Nie sú vysadené len tak hocijako, ale totálne symetricky. Konečná množina M bodov v rovine sa nazýva totálne symetrická, ak obsahuje aspoň 3 body a pre každú dvojicu bodov A, B množiny M je množina M osovo symetrická vzhľadom na os úsečky AB. Dokážte, že ak má totálne symetrická množina n bodov, tak jej body tvoria vrcholy pravidelného n-uholníka.*

Riešenie: (opravoval Slavo)

Poďme sa hrať s množinou M. Preklápajme si ju podľa osí úsečiek. Vždy, keď ju preklopíme, tak dostaneme znovu M. Teda M sa preklápaním cez osi vôbec nehýbe. O tom chceme povedať niečo viac. Čo nám vie niečo povedať o polohe bodov v rovine? Napríklad ich ťažisko.

Ťažisko je v tejto chvíli pre nás super bod, lebo sa pri preklápaní neposúva (ako celá množina M). Čiže leží na každej osi úsečiek. Keďže ťažisko leží na každej osi úsečky dvojici bodov z M, tak každá dvojica bodov z množiny

M s ním tvorí rovnoramenný trojuholník. Teda všetky body z množiny M sú od neho rovnako vzdialené. Všetky teda ležia na kružnici so stredom v ťažisku.

Čo nám ešte treba ukázať na to, aby body množiny M tvorili vrcholy pravidelného n-uholníka? Že sú na kružnici pravidelne (t. j. že sú medzi nimi rovnaké vzdialenosti). Stačí ukázať, že od ľubovoľného vrcholu sú susedné vrcholy rovnako vzdialené. Poďme na to.

Nech A, B, C sú po sebe idúce vrcholy na kružnici. Chceme ukázať, že $|AB| = |BC|$. Inak povedané, že vrchol B leží na osi úsečky AC. Označme si B' bod, čo vznikne z bodu B preklopením cez os úsečky AC. (Ukážeme, že oba body B a B' ležia na kružnici medzi A a C, a teda bod B' je totožný s bodom B. Týmto bude dôkaz hotový.)

Os úsečky BB' prechádza ťažiskom, teda B' leží na kružnici. Keďže zároveň platí $BB'||AC$ (obe sú kolmé na os úsečky AC), tak body B, B' ležia na rovnakej strane úsečky AC. Keďže susedné vrcholy vrcholu B sú A a C, vrchol B' musí byť totožný s vrcholom B, teda vrchol B leží na osi AC.

Ukázali sme, že body množiny M ležia na kružnici a sú medzi nimi rovnaké vzdialenosti. Z toho vyplýva, že tvoria pravidelný n-uholník.

Úloha č. 8: *Príjemný kľud na ihrisku sa pominul, keď prišla celá škôlka reálnych čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Aby toho nebolo málo, prišla aj ďalšia škôlka reálnych čísel $b_1, b_2, \ldots, b_n$ spĺňajúcich $1 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$. Dokážte, že existuje kladné celé číslo $k \leq n$, pre ktoré platí*

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leq |a_1 + a_2 + \cdots + a_k|.$$

Riešenie: (opravoval Jožo)

Našou úlohou je nájsť číslo k, pre ktoré platí nerovnosť zo zadania, budeme ju označovať ako $(\star)$. Za k si môžeme vyberať z čísel $1, 2, \ldots, n$. Môžeme si všimnúť, že pri zmene k sa výraz na ľavej strane nemení (je to vždy to isté číslo), zatiaľ čo na pravej strane sa výraz môže meniť. Ak nerovnosť $(\star)$ platí pre nejaké k, tak určite platí aj pre také m, pre ktoré je súčet $|a_1 + a_2 + \cdots + a_m|$ najväčší možný. Preto hľadanie k vybavíme hneď na začiatku a budeme dokazovať nerovnosť $(\star)$ pre $k = m$. Ale ako na to?

Často použiteľný spôsob, ako sa dajú dokazovať nerovnosti, je postupné upravovanie jednej strany nerovnosti na ďalšie výrazy, medzi ktorými platí správna nerovnosť. Na ľavej strane máme v absolútnej hodnote súčet čísel. Pri takýchto prípadoch príde vhod nerovnosť $|x + y| \leq |x| + |y|$ (pre reálne čísla x, y), ktorú možno ľahko dokázať a taktiež aj zovšeobecniť pre súčet n čísel. Takto vieme dostať súčet výrazov $|a_ib_i|$, resp. $|a_i|b_i$ vďaka nezápornosti b_i. Avšak z takýchto výrazov ťažko získame späť súčet $|a_1 + a_2 + \cdots + a_m|$.

Ďalším nedostatkom je, že zatiaľ nevyužívame voľbu $k = m$. Táto voľba nám dáva totiž veľa nerovností, ktoré môžeme využiť. Tieto nerovnosti sa týkajú súčtov $|a_1 + a_2 + \cdots + a_i|$, aby sa nám s nimi ľahšie pracovalo, označíme si $s_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$ pre celé čísla $1 \leq i \leq n$. Tak budeme mať na pravej strane v absolútnej hodnote len jednu neznámu a k nej sa už dopracujeme ľahšie.

Teraz si však musíme premenné $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vyjadriť pomocou $s_1, s_2 \ldots, s_n$. Zjavne $a_1 = s_1$, potom $a_2 = s_2 - s_1$ a všeobecne $a_i = s_i - s_{i-1}$ pre $2 \leq i \leq n$. Ľavú stranu si vieme teda zapísať ako

$$\begin{aligned}|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| &= |s_1b_1 + (s_2 - s_1)b_2 + \cdots + (s_n - s_{n-1})b_n| = \\ &= |(b_1 - b_2)s_1 + \cdots + (b_{n-1} - b_n)s_{n-1} + b_ns_n|.\end{aligned}$$

Teraz môžeme súčet v absolútnej hodnote odhadnúť súčtom absolútnych hodnôt, ako sme spomenuli vyššie.

$$|(b_1 - b_2)s_1 + \cdots + (b_{n-1} - b_n)s_{n-1} + b_ns_n| \leq |(b_1 - b_2)s_1| + \cdots + |(b_{n-1} - b_n)s_{n-1}| + |b_ns_n|.$$

Vďaka podmienke $b_i \geq b_{i+1}$ sú rozdiely $b_i - b_{i+1}$ nezáporné.[4] Preto ich môžeme vybrať z absolútnych hodnôt, čím dostaneme

$$|(b_1 - b_2)s_1| + \cdots + |(b_{n-1} - b_n)s_{n-1}| + |b_ns_n| = (b_1 - b_2)|s_1| + \cdots + (b_{n-1} - b_n)|s_{n-1}| + b_n|s_n|.$$

Je na čase využiť, že m sme si zvolili tak, že hodnota $|s_m|$ je najväčšia spomedzi $|s_i|$, platí $|s_i| \leq |s_m|$. Vďaka nezápornosti $b_i - b_{i+1}$ platí aj $(b_i - b_{i+1})|s_i| \leq (b_i - b_{i+1})|s_m|$. Získavame tak ďalší vzťah

$$\begin{aligned}(b_1 - b_2)|s_1| + \cdots + (b_{n-1} - b_n)|s_{n-1}| + b_n|s_n| &\leq (b_1 - b_2)|s_m| + \cdots + (b_{n-1} - b_n)|s_m| + b_n|s_m| = \\ &= (b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + \cdots + b_{n-1} - b_n + b_n)|s_m| = b_1|s_m|.\end{aligned}$$

Nakoniec nám stačí využiť, že $b_1 \leq 1$, a preto $b_1|s_m| \leq |s_m|$. Spojením všetkých nerovností, prípadne rovností, cez ktoré sme prešli, dostávame

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leq |s_m|,$$

[4] Tu je trochu formálny problém, keď $i = n$, lebo tu dostávame neznáme číslo b_{n+1}. Aby sme nemuseli tento prípad riešiť osobitne, tak si definujeme $b_{n+1} = 0$.

čo sme mali ukázať.

Úloha č. 9: *Terezka, Kristínkina staršia sestra, si tiež zobrala kriedy. Keďže je však staršia, namiesto nezmyselných čarbaníc si nakreslila trojuholník ABC. Vpísala do neho kružnicu, ktorá sa dotýkala strán BC, AC, AB postupne v bodoch D, E, F. Označila K, L, N, M postupne stredy úsečiek FB, BD, CD, EC. Nakoniec priesečník priamok KL a MN pomenovala P. Dokážte, že $|BP| = |CP|$.*

Riešenie: (opravovali Mišo a Pedro)
Spôsobov ako sa dala riešiť táto úloha je viacero. Ukážeme riešenie nadväzujúce na nápovedu. Toto riešenie využíva vlastnosti chordál, o ktorých sa môžete dočítať aj v našej KMS zbierke. Spätne vysvetlené, chordála je množina bodov, ktoré majú rovnakú mocnosť k dvom kružniciam. Mocnosť bodu M ku kružnici so stredom S a polomerom r je číslo $|MS|^2 - r^2$ a toto číslo je zároveň dĺžka dotyčnice z bodu M umocnená na druhú, čo sa dá ľahko overiť Pytagorovou vetou. Ňou vieme overiť aj to, že chordála je priamka. Na záver spomenieme, že vieme využiť aj kružnicu s nulovým polomerom, t. j. bod. Cez vzdialenosť od stredu vieme presne definovať mocnosť bodu k bodu a chordála bodu a kružnice (aj dvoch bodov) bude stále priamka. V tejto úlohe to bude obzvlášť užitočné.

Zoberme si body B, C a kružnicu k, ktorá je vpísaná trojuholníku ABC. Chordála kružnice k a bodu B je priamka KL. Chordála kružnice k a bodu C je priamka MN. Bod P teda leží na týchto dvoch chordálach. Keďže chordála je množina bodov majúcich rovnakú mocnosť k daným dvom kružniciam, tak bod P musí mať rovnakú mocnosť k bodu B a kružnici k, lebo leží na priamke KL. Zároveň bod P musí mať rovnakú mocnosť k bodu C a kružnici k, lebo leží na priamke MN. Tým pádom má bod P rovnakú mocnosť k bodu B ako k bodu C. To znamená, že $|PB|^2 = |PC|^2$ (to je jeho mocnosť, lebo polomer je 0), teda P musí byť od oboch bodov vzdialený rovnako a úloha je tým dokázaná.

Úloha č. 10: *Maťko sa hrá na schovávačku s monickými polynómami. Skúste si to aj vy! Nájdite všetky monické polynómy[5] P s celočíselnými koeficientami a nasledujúcou vlastnosťou: Existuje prirodzené číslo N také, že $2(P(p)!) + 1$ je deliteľné p pre každé prvočíslo $p > N$.*

Riešenie: (opravoval Cd)
Polynóm P rádu n je funkcia tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde a_0, a_1, …, a_{n-1}, a_n sú jeho parametre. Polynóm je monický, ak jeho vedúci člen je $a_n = 1$. Každý monický polynóm je určený svojím rádom n a k tomu n koeficientami a_0, …, a_{n-1}. V tomto príklade máme nájsť všetky monické polynómy, ktoré spĺňajú $p \mid 2(P(p)!) + 1$ pre všetky dosť veľké prvočísla p.

Ako prvé si všimnime, že monických polynómov je veľa. Ale naozaj, naozaj veľa. Bolo by teda super obmedziť túto skupinu polynómov, aby sme ich nemuseli uvažovať všetky naraz. Pri príkladoch s polynómami je častý prvý krok rozobrať prípady podľa rádu polynómu, do čoho sa hneď pustíme.

Uvažujme na začiatok polynómy stupňa 0. Takýchto polynómov je dokopy... jeden, keďže vedúci (a zároveň jediný) člen musí byť rovný jednej. Konkrétne je to $P(x) \equiv 1$. Pre každé prvočíslo p máme $2(P(p)!) + 1 = 3$, čo nie je deliteľné žiadnym prvočíslom okrem 3. Monické polynómy rádu 0 teda nemusíme uvažovať.

Ako druhý prípad uvažujme monické polynómy rádu aspoň dva. V tomto prípade nám bude nápomocné pozorovanie, že ak existuje prvočíslo p pre ktoré $P(p) \geq p$, tak potom $p \nmid 2(P(p)!) + 1$, keďže $p \mid P(p)!$. Z predchádzajúceho vyplýva, že ak máme polynóm P a prvočíslo p pre ktoré $P(p) \geq p$, tak tento polynóm nespĺňa požiadavku zo zadania. V ďalšom ukážeme, že pre všetky monické polynómy rádu aspoň dva vieme takéto prvočíslo p nájsť.

Uvažujme polynóm $Q(x) = P(x) - x$. Polynóm Q je tiež monický aspoň stupňa dva. Chceme ukázať, že existuje prvočíslo p, pre ktoré $Q(p) \geq 0$. Jedna z vlastností monických polynómov je, že pre „dosť veľké“ x majú iba kladné hodnoty. Ak teda zvolíme „dosť veľké“ prvočíslo p, nám bude platiť $Q(p) \geq 0$, čo sme chceli dokázať a teda monické polynómy rádu aspoň dva uvažovať tiež nemusíme.

Pre úplnosť si tvrdenie o „dosť veľkých“ číslach dokážeme. Nech $x > 1$ a nech M je najväčšie z absolútnych hodnôt parametrov $|a_0|, \ldots, |a_{n-1}|$. Potom vieme spraviť nasledovné odhady

$$\begin{aligned}
a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 &\geq -|a_{n-1}|x^{n-1} - |a_{n-2}|x^{n-2} - \ldots - |a_1|x - |a_0| \\
&\geq -Mx^{n-1} - Mx^{n-2} - \ldots - Mx - M \\
&> \underbrace{-Mx^{n-1} - Mx^{n-1} - \ldots - Mx^{n-1} - Mx^{n-1}}_{n-\text{krát}} \\
&= -nMx^{n-1},
\end{aligned}$$

kde v poslednom odhade sme použili, že $x^i > 1$ pre $x > 1$ a $i \geq 1$. Ak teda zvolíme $x > nM$, tak máme

$$Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 > x^n - Mnx^{n-1} = x^{n-1}(x - Mn) > 0,$$

[5]Monický polynóm je polynóm s vedúcim koeficientom 1, teda v tvare $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

čo sme presne chceli dokázať.

Na záver nám ostala posledná kategória monických polynómov a tie majú rád 1. Vo všeobecnosti môžeme takýto polynóm zapísať ako $P(x) = x + k$, kde k je celé číslo. Všimnime si, že ak $k \geq 0$, tak bude existovať prvočíslo p také, že $P(p) \geq p$, čo nám z vyššie uvedených dôvodov opäť nevyhovuje zadaniu. Ostávajú nám teda polynómy so záporným k, ktoré si pre jednoduchšie chápanie preznačíme na $P(x) = x - k$, pre $k > 0$.

Vo zvyšku postupu sa ponoríme do tajomného sveta kongruencií.[6] V nasledujúcom využijeme tri vlastnosti kongruencií, konkrétne:

1. $a + b \equiv b \pmod{a}$, pre všetky $a \in \mathbb{N}$ a $b \in \mathbb{Z}$,
2. $a \equiv b \pmod{d} \quad \Rightarrow \quad ac \equiv bc \pmod{d}$, pre všetky $a, b, c \in \mathbb{Z}$ a $d \in \mathbb{N}$,
3. (*Wilsonova veta*) $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, pre všetky prvočísla p.

Prvé dve vlastnosti sú štandardné. Wilsonova veta je menej známa, ale zároveň kľúčová pre túto úlohu.

Podmienku pre hľadaný polynóm zo zadania môžme pomocou kongruencií zapísať ako $2(P(p)!) \equiv -1 \pmod{p}$, pre všetky dosť veľké prvočísla p. Dosadením uvažovaného tvaru polynómu P dostávame podmienku $2((p-k)!) \equiv \equiv -1 \pmod{p}$. Na ľavej strane máme faktoriál, ktorý doplníme do $(p-1)!$ tým, že (využitím 2. vlastnosti vyššie) prenásobíme obe strany postupne $(p-1)$, $(p-2)$, …, $(p-k+1)$. Tým dostávame podmienku

$$2((p-1)!) \equiv (p-1)(p-2)\dots(p-k+1) \pmod{p}.$$

Využitím 1. vlastnosti spomenutej vyššie máme

$$(p-1)(p-2)\dots(p-k+1) \equiv (-1)(-2)\dots(-k+1) \equiv (-1)^{k-1}(k-1)! \pmod{p},$$

čo nám upraví pravú stranu podmienky na

$$2((p-1)!) \equiv (-1)^{k-1}(k-1)! \pmod{p}.$$

Použitím Wilsonovej vety na ľavej strane a následne pričítaním čísla 2 na obe strany (zase využitím 1. vlastnosti) dostávame

$$0 \equiv (-1)^{k-1}(k-1)! + 2 \pmod{p}.$$

Naša posledná kongruencia hovorí, že výraz nezávislý od prvočísla p je deliteľný všetkými dosť veľkými prvočíslami. To môže nastať, iba ak je daný výraz rovný nule. Teraz už ľahko dopočítame, že jediné k spĺňajúce rovnosť $(-1)^{k-1}(k-1)! = 0$ je $k = 3$. Náš jediný kandidát na riešenie príkladu je teda polynóm $P(x) = x - 3$. Ľahko overíme, že všetky vyššie uvedené kroky vieme nasledovať aj opačným smerom a $P(x) = x - 3$ teda skutočne vyhovuje zadaniu.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	P	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
1.	Dávid Mišiak	2	GJH	4	45	9	9	9			9	9	90
2.	Marián Poturnay	2	GPiešť	4	44	9	9	9	9		9		89
3.	Pavol Kollár	2	GAMČA	5	43		9	9	9		9	8	87
3.	Tomáš Sásik	3	GAMČA	8	43			9	9	8	9	9	87
5.	Ákos Záhorský	3	GŠahy	7	38			9	9	9	9	8	82
6.	Samuel Krajči	2	GAlKE	5	43		9	9	9		9		79
7.	Martin Števko	2	GAlKE	4	41	9	9	8			9		76
8.	Peter Ralbovský	4	GJH	11	28			8	9	9	9	9	72
8.	Lucia Krajčoviechová	1	GJH	3	37	9	9	8	9				72
10.	Monika Machalová	2	GJH	4	34	9	9	8	2	2	9		71
11.	Jakub Pravda	1	ŠpMNDaG	2	40	9	9	8			0		66
11.	Matej Moško	2	GAMČA	4	33	9	9	8	4		3		66
13.	Peter Onduš	3	ŠpMNDaG	6	35		9	9	9				62
14.	Tereza Prokopová	2	GJH	4	35	9	9	8			0		61
15.	Pavol Kebis	2	GJH	4	39	9	1	8				3	60

[6] Kongruencia je len fancy (čítaj „fensi“) spôsob ako zapísať, že s a t dávajú rovnaký zvyšok po delení u, čo zapíšeme pomocou kongruencií ako $s \equiv t \pmod{u}$. Pre kongruencie platí kopec štýlových vzťahov a čitateľom, ktorý nie sú s týmito vzťahmi oboznámený odporúčame nalistovať kapitolu 4.6 v zbierke KMS (`https://kms.sk/zbierka/`).

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**P**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	$\sum$
15.	Viktória Brezinová	2	GAlKE	4	33	9	9	4	5				60
17.	Michal Horanský	1	ŠpMNDaG	2	33	4	9	8	2	3			59
18.	Richard Oravkin	2	GBajkBA	4	35	9		8	6				58
19.	Jonáš Dujava	2	SPlPO	4	30	4	9	9	5		0		57
20.	Štefánia Glevitzká	2	GPriev	4	30	9	9	8					56
21.	Mária Ďuračková	2	GJH	4	28	9		9			9		55
22.	Michal Staník	2	GĽŠTN	4	27	9	9	9		1			55
23.	Radek Olšák	2	Iná škola	3	41				9				50
24.	Jakub Poljovka	3	GPárNT	7	27		9	8			5		49
24.	Jozef Fülöp	1	GAMČA	3	27	9		8	5				49
26.	Miška Dlugošová	3	GKuPP	7	30		9	9			0		48
27.	Pavol Klein	2	GPiešť	4	16	4	9	9			9		47
28.	Jakub Parada	1	GAMČA	3	34	1		8		3			46
28.	Michaela Ždímalová	2	GJH	3	26	2	9	8	1		0		46
28.	Daniel Magula	3	GPiaNT	4	26	9	3	8					46
28.	Nina Benková	2	GPiešť	4	26	3	9	8					46
32.	Matúš Zubčák	2	GPárNT	4	17	9	9	9					44
32.	Lukáš Baláž	2	GBánov	3	27	9		8					44
32.	Michal Molnár	2	GAMČA	4	20		6	9			9		44
35.	Eliška Macáková	6zš	SZScenada	-3	25	4	9	0	5				43
36.	Martina Kalašová	2	GJH	3	27	1		8	1		0		37
37.	Veronika Ganzová	3	GMerTT	4	17	3	9	6					35
38.	Filip Čermák	3	Iná škola	3	34								34
38.	Jaroslav Paška	2	ŠpMNDaG	3	21	9		4					34
40.	Jozef Číž	2	GJH	4	18	6		9					33
41.	Alan Marko	3	Leaf	7	0			9	8	5	9		31
42.	Karolína Pisoňová	2	GBánov	4	13	9		8					30
43.	Marianna Hronská	9zš	BiGSuč	1	17	0	3	8			1		29
44.	Tatiana Matejkova	1	GPárNT	2	17		3	8				0	28
45.	Juraj Rosinský	2	I de Lancy	3	26								26
46.	Michal Mráz	2	ŠpMNDaG	4	24								24
47.	Martina Šuchová	3	GPárNT	6	0		9	8			0		17
48.	Katarína Studeničová	3	GDKubí	5	0		5	8			3		16
49.	Jana Černíková	2	GJH	3	10	3	2						15
50.	Kristina Galikova	2	ŠpMNDaG	4	7								7
51.	Lucia Ondovčíková	2	GModra	4	4								4

kategória ALFA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**P**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	$\sum$
1.	Miro Macko	1	Leaf	2	44		9	9	9	9	8	5	88
2.	Matej Priesol	1	ŠpMNDaG	2	41		9	9	9	9	8		85
2.	Michal Kajan	1	GBajkBA	2	40		9	9	9	9	9	4	85
4.	Jakub Pravda	1	ŠpMNDaG	2	38		9	9	9	9	8		82
5.	Lucia Krajčoviechová	1	GJH	3	37			9	9	9	8	9	81
5.	Eliška Macáková	6zš	SZScenada	-3	43	6	9	9	4	9	0	5	81
7.	Barbora Barančíková	1	ŠpMNDaG	2	42		9	9	2	9	8		79
8.	Timea Szöllősová	1	GAMČA	1	31	9	9		2	9	7	9	74
9.	Erik Řehulka	1	ŠpMNDaG	2	32		9	9	4	9	8		71
9.	Michal Masrna	1	GPošKE	2	36		9	9	9		8		71
11.	Martin Starovič	1	GAMČA	2	37		9	8	4	4	8		70
11.	Róberta Juríková	2	Iná škola	3	37			9	6	9	9		70
13.	Tomáš Ganz	1	ŠpMNDaG	2	27		9	8	3	9	8		64
13.	Kristína Grolmusová	1	BiGSuč	1	34	5	9	9	0	5	2		64

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	P	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
15.	Filip Csonka	2	GAlKE	2	30		9		9	9	5		62
15.	Matej Hanus	1	GPošKE	2	30		9	9	5		9		62
17.	Tatiana Matejkova	1	GPárNT	2	29		9	9		3	8		58
18.	Lukáš Gáborik	9zš	ZSRadBB	0	30	8	9	6		1			54
18.	Patrik Rusnák	1	GAlKE	2	29		9		4	4	8		54
20.	Gabriela Šavelová	1	GAMČA	2	23		9	9	2		8		51
21.	Kornélia Nemcová	1	GAMČA	2	26		9	9		1		5	50
22.	Alex Chudíc	1	ŠpMNDaG	2	25		9	9	2				45
23.	Jitka Muravská	1	GAMČA	1	31	2	4	2			3		42
23.	Adam Kuniak	1	GAMČA	1	19	8	9		6				42
25.	Andrej Pečimúth	3	GNZám	1	27			6			8		41
26.	Jozef Fülöp	1	GAMČA	3	18				9		8	5	40
27.	Tánička Bielaková	1	GAMČA	2	14		9	5	2	4	5		39
27.	Michal Horanský	1	ŠpMNDaG	2	16				4	9	8	2	39
29.	Michaela Ždímalová	2	GJH	3	17				2	9	8	1	37
29.	Marianna Hronská	9zš	BiGSuč	1	26				0	3	8		37
31.	Alexandra Géciová	1	GJH	1	14	8	9	3	0		0	2	36
32.	Lukáš Baláž	2	GBánov	3	18				9		8		35
32.	Jasmína Portašiková	2	GVarZA	3	21			2	3		5	4	35
34.	Jakub Parada	1	GAMČA	3	25				1		8		34
34.	Martina Kalašová	2	GJH	3	24				1		8	1	34
36.	Jaroslav Paška	2	ŠpMNDaG	3	20				9		4		33
36.	Radek Olšák	2	Iná škola	3	24							9	33
38.	Hana Kluvancová	1	GPárNT	1	0	0	9	5		9	8		31
39.	Jana Černíková	2	GJH	3	16			9	3	2			30
40.	Ondrej Tomasik	1	Iná škola	1	28								28
41.	Matej Vojtek	1	GAMČA	2	27								27
42.	Karin Demková	1	GJH	2	9		9	1	1	2	4		26
42.	Róbert Sabovčík	1	GPošKE	1	0	9	8	3	6				26
44.	Filip Čermák	3	Iná škola	3	25								25
45.	Juraj Rosinský	2	I de Lancy	3	24								24
45.	Martin Koutenský	1	GAMČA	2	24								24
45.	Andrej Genčur	1	Iná škola	2	8		9	3	4				24
48.	Tomáš Šumšala	1	GJH	2	23								23
48.	Anežka Pajunková	1	Iná škola	2	5		9	9		0			23
50.	Adam Barla	1	GTajBB	1	22								22
50.	Svetlana Rampašeková	1	GPárNT	1	0	0	9	4		9			22
52.	Alžbeta Jurečeková	2	ezsmt	3	9			5	1	1	1	2	19
53.	Tomáš Šimek	9zš	ŠpMNDaG	0	18								18
54.	Jakub Hluško	2	ŠpMNDaG	2	17								17
54.	Karin Ghirbaková	2	GAMČA	2	0		9	8					17
56.	Marek Tran	1	GAMČA	2	16								16
57.	Ema Hartmannová	2	GPriev	2	13								13
58.	Natalia Calvo	1	GPárNT	2	10								10
59.	Matúš Tamáši	2	Iná škola	2	9								9
59.	Laura Sládečková	2	GVarZA	2	0		9						9
61.	Andrej Bederka	2	ŠpMNDaG	2	5								5
62.	Natália Grigová	1	GAMČA	1	4								4
62.	Jana Viktória Kováčiková	3	Iná škola	3	4								4
64.	Michal Vranovský	1	GCSLewis	2	2								2