Vzorové riešenia 3. série letnej časti KMS 2016/2017

Úloha č. 1: *V Krajine osí ôs si pre lepší prehľad ofarbili všetky celé čísla nabielo alebo načierno. Vieme, že ak vezmeme ľubovoľné dve biele čísla a, b, tak čísla $a+b$, $a-b$ majú rôzne farby. Navyše vieme, že číslo 1 je biele. Zistite, ktorej farby je číslo 2017.*

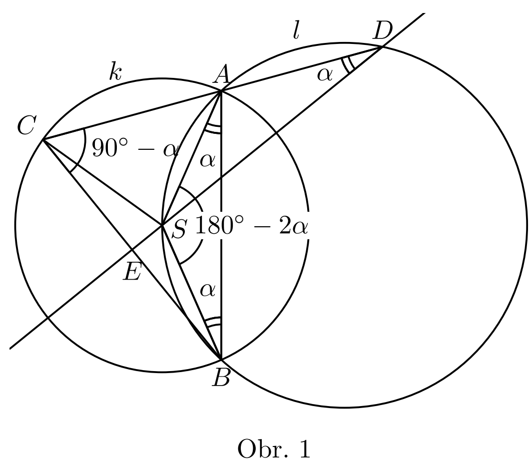
Riešenie: (opravovala Kika)

Vieme, že číslo 1 je biele. Skúsme sa zamyslieť nad tým, akej farby musí byť číslo 0. Ak by bolo biele, tak by vďaka podmienke zo zadania o dvoch bielych číslach muselo platiť, že $1+0$ a $1-0$ boli rôznej farby. Nakoľko $1+0=1-0=1$, tak to docieliť nevieme. Teda číslo 0 nemôže byť biele a musí byť čierne. Akej farby je číslo 2? Zoberme si dve biele čísla a konkrétne čísla 1 a 1. Čísla $1+1=2$ a $1-1=0$ musia byť rôznej farby. Číslo 0 je čierne, číslo 2 musí byť biele. Akej farby je číslo 3? Zoberme si dve biele čísla a konkrétne čísla 2 a 1. Čísla $2+1=3$ a $2-1=1$ musia byť rôznej farby. Číslo 1 je biele, číslo 3 musí byť čierne. Takto sa s tým vieme hrať a zisťovať ďalšie a mali by sme dospieť k tomu, že čísla 0, 3, 6 a 9 sú čierne a čísla 1, 2, 4, 5, 7, 8 a 10 sú biele. To, že čierne čísla sú práve násobky troch je kúsok podozrivé. Poďme si dokázať, že to tak musí byť.

Predstavme si, že vieme o číslach n, $n+1$ a $n+2$, že sú ofarbené nasledovne: n je čierne a $n+1$ a $n+2$ sú biele. Akej farby musí byť $n+3$, $n+4$ a $n+5$? Čísla $(n+2)+1=n+3$ a $(n+2)-1=n+1$ musia byť rôznej farby, teda $n+3$ je čierne. Čísla $(n+2)+2=n+4$ a $(n+2)-2=n$ musia byť rôznej farby, teda $n+4$ je biele. Čísla $(n+4)+1=n+5$ a $(n+4)-1=n+3$ musia byť rôznej farby, teda $n+5$ je biele. Vieme sfarbenie čísel 0, 1 a 2, z toho vieme farbu 3, 4 a 5, z toho vieme farbu... Takže vieme farbu každého čísla.

Je vždy zachovaná naša podmienka? Naše biele čísla nie sú deliteľné tromi. Ak obe dávajú zvyšok 1 po delení tromi, ich súčet dáva zvyšok 2, a teda je to biele číslo, ich rozdiel dáva zvyšok 0, a teda je to čierne číslo. Ak dávajú obe zvyšok 2 po delení tromi, ich súčet dáva zvyšok 1, a teda je to biele číslo, ich rozdiel dáva zvyšok 0, a teda je to čierne číslo. Ak jedno číslo dáva zvyšok 1 a druhé zvyšok 2 po delení tromi. Tak ich súčet dáva zvyšok 0, a teda je čierne, ich rozdiel dáva zvyšok 1 alebo 2 a je to biele číslo. Všetko sedí, všetko pasuje. Čierne čísla sú deliteľné tromi a biele čísla nie sú deliteľné tromi. 2017 nie je násobkom troch, a teda to musí byť biele číslo.

Úloha č. 2: *Najuznávenejšou osobou krajiny je čarodejník Š. Je známy tým, že svojou mágiou kreslí rôzne geometrické obrazce, napríklad takéto. Kružnice k a l, sa pretínajú v dvoch bodoch A a B. Stred S kružnice k leží na kružnici l. Tetiva AC kružnice k pretína l po druhýkrát v bode D. Dokážte, že úsečky SD a BC sú na seba kolmé.*[1]



Obr. 1

[1] K tejto úlohe vám odporúčame pripomenúť si, resp. naštudovať vzťahy medzi uhlami v kružnici. Môžete sa o nich dočítať v článku `https://old.kms.sk/~mazo/matematika/pocitanieUhlov.pdf`, hlavne v príklade 2.

Riešenie: (opravovala Čeky)
Keďže máme v zadaní kružnice, budeme sa snažiť využívať stredové a obvodové uhly. Uhol ADS si označme α. Tento uhol je obvodový uhol kružnice l k oblúku AS. Obvodový uhol k tomu istému oblúku je aj uhol ABS, preto je jeho veľkosť tiež α. Trojuholník ABS je rovnoramenný, lebo S je stred kružnice k, teda úsečky SA aj SB sú jej polomery. V tomto trojuholníku musia mať uhly pri základni rovnakú veľkosť, takže aj uhol SAB je α. Dopočítaním tretieho uhla v spomínanom trojuholníku dostávame, že veľkosť uhla ASB je $180° - 2\alpha$. Tento uhol je stredovým uhlom k obvodovému uhlu BCA, preto musí byť jeho dvojnásobkom, teda veľkosť uhla BCA je $90° - \alpha$. Označme si priesečník priamok SD a BC ako E. Pozrime sa teraz na trojuholník CDE. Dva vnútorné uhly poznáme, poďme dopočítať tretí. Dostávame, že veľkosť uhla DEC je $90°$, čiže priamky SD a BC sú na seba kolmé, čo je presne to, čo sme chceli.

Úloha č. 3: *Dvaja susedia Krajiny osí ôs, Kornélia a Leopold, nerobia celé dni nič iné, len hrajú nasledovnú hru. Napíšu si na papier čísla* 1, 2, …, 100. *Hru začína Kornélia a potom sa s Leopoldom striedajú v ťahoch. Hráč v jednom svojom ťahu vpíše znamienko* $+$, $-$ *alebo* $\cdot$ *(plus, mínus alebo krát) medzi ľubovoľné dve susedné čísla, medzi ktorými ešte žiadne nie je. Hra končí, keď medzi každými dvomi susednými číslami je práve jedno znamienko. Môže Kornélia docieliť, aby bol na konci výsledok párny, nech hrá Leopold akokoľvek? Môže Kornélia docieliť, aby bol výsledok nepárny?*

Riešenie: (opravoval Marek)
Na začiatok je dobré si všimnúť zopár drobností. Párne čísla a nepárne čísla sa striedajú. Takisto si všimneme, že máme 99 medzier medzi číslami, a teda keď Kornélia začína, bude aj končiť. Znamienka $+$ a $-$ narábajú s paritou rovnako, t. j. $n + p = n$, $p + n = n$, $n - p = n$ a $p - n = n$[2]. Teda nám stačí uvažovať len jedno z nich. Budeme používať znamienko $+$. Pre znamienko $\cdot$ zas platí $p \cdot n = n \cdot p = p$.

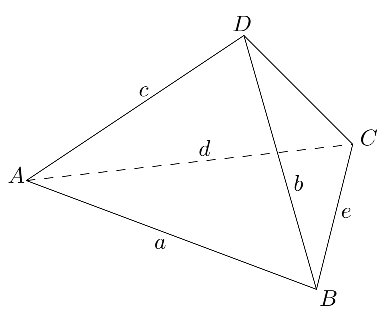
Ak by sa Kornélií podarilo spárovať každé nepárne číslo s aspoň jedným párnym číslom pomocou znamienka $\cdot$, bolo by jedno, ako hrá súper, pretože výraz by bol zaručene párny.

Teraz vyvstáva otázka, ako hrať, aby toto docielila. Keďže každé nepárne číslo okrem 1 má dvoch susedov, medzi ktorých vieme dať znamienka. Môžme tak hrať nasledovným spôsobom: Vždy keď Leonard zahrá, pozrieme sa, u ktorého nepárneho čísla N to zahral. Môžu nastať následovné situácie: $+N$, $N+$, $N\cdot$, $\cdot N$. Keď vo všetkých prípadoch doplníme $\cdot$, tak dostaneme: $+N\cdot$, $\cdot N+$, $\cdot N\cdot$, $\cdot N\cdot$ a to zaručuje, že každé nepárne číslo sa spári s jedným párnym číslom a výsledok bude párny. Zostala nám už len 1 ktorú treba ošetriť samostatne. Ak chceme teda zaručiť celkovo párny výsledok tak zahráme na začiatku $1 \cdot 2$ a potom hráme, ako je opísané vyššie. Ak chceme nepárny výsledok, stačí nám hrať rovnakú taktiku, len na začiatku zahráme $1+2$. Takto zjavne docielime nepárny výsledok.

V oboch prípadoch máme vyhrávajúcu taktiku, a teda Kornélia môže skórovať!

Úloha č. 4: *Zlatokop Zlatko sníva celý život o tom, že nájde najvzácnejší drahokam krajiny v tvare trojstenu. Podarilo sa mu však nájsť iba štvorsten*[3] *, tak by si z neho chcel spraviť aspoň trojuholník.*
Dokážte, že v každom štvorstene existuje vrchol, z ktorého vychádzajúce hrany môžu vytvoriť trojuholník. Tri úsečky môžu vytvoriť trojuholník, práve vtedy, keď je každá z nich kratšia ako súčet dĺžok zvyšných dvoch.

Riešenie: (opravovali Adam a Luxus)



Obr. 2

Kedy sa nedá z troch strán spraviť trojuholník? Vtedy, keď je jedna z nich dlhšia alebo rovnako dlhá ako zvyšné dve. Túto múdrosť voláme trojuholníková nerovnosť a zjavne nás bude v tomto príklade zaujímať nejaké jej využitie.

Úlohu môžeme riešiť sporom, teda skúsime vytvoriť niečo, čo nesplňa tvrdenie zo zadania, a popri tom dokážeme, že nič také neexistuje, a teda tvrdenie zo zadania bude platiť vždy. V zadaní sa píše že v každom

[2] V týchto symbolických rovniciach p značí nejaké párne číslo a n nepárne číslo.
[3] Ak nevieš čo je štvorsten, pozri sa sem `https://sk.wikipedia.org/wiki/Štvorsten`

štvorstene existuje vrchol z ktorého vychádzajúce hrany môžu vytvoriť trojuholník. Opakom je tvrdenie, že v nejakom štvorstene neexistuje ani jeden vrchol z ktorého vychádzajúce hrany môžu vytvoriť trojuholník.

Ak má byť niektorá z troch hrán vychádzajúcich z vrchola dlhšia ako ostatné dve dokopy, musí to byť tá najdlhšia. Stávka na istotu je zobrať najdlhšiu hranu v celom štvorstene, povedzme že to bude napríklad hrana a (hrany aj vrcholy sme si pomenovali tak, ako sú na obrázku 2). Je takto zjavne najdlhšia z hrán vychádzajúcich z vrcholu A aj z vrcholu B. Ak má platiť, že dve z hrán vychádzajúcich z vrchola majú byť kratšie ako tretia, dostaneme nerovnosti

$$a \geq c + d,$$

$$a \geq b + e.$$

Zároveň už ale nejaké trojuholníky v štvorstene máme — jeho steny. Pre tie vieme zapísať nerovnosti

$$a < b + c,$$

$$a < d + e.$$

Obe dvojice nerovností môžeme sčítať a z každej dostaneme jednu novú nerovnicu:

$$2a \geq b + c + d + e,$$

$$2a < b + c + d + e.$$

Na prvý pohľad je zjavné, že sme dostali spor. Z neho vyplýva, že nie je pravda, že v štvorstene neexistuje ani jeden vrchol, z ktorého hrán by sme vedeli vytvoriť trojuholník. Z toho vyplýva že v štvorstene existuje vrchol, z ktorého hrán by sme vedeli vytvoriť trojuholník. A presne to sme mali dokázať.

Úloha č. 5: *V Krajine osí ôs však žije aj zlý čarodejník, známy pod menom Devil Voršiper. Dobrý čarodejník Š ho vyzval raz na súboj. Devil Voršiper rozložil na stôl $2n$ kariet pexesa (n párov rovnakých kariet). V každom ťahu môže Š otočiť k kariet lícom nahor. Ak je medzi nimi aspoň jeden pár, Š vyhral. Ak nie, tak Devil Voršiper nachvíľu oslepí Š-a. Kým Š nevidí, tak Devil Voršiper zoberie k kariet, ktoré Š otočil, ľubovoľne ich zamieša a potom v nejakom poradí vráti na tých k pozícií, odkiaľ ich zobral. Potom sa Š-ovi otvoria oči a pokračuje ďalším ťahom. Pre ktoré dvojice celých čísel $n \geq k \geq 2$ existuje prirodzené číslo m také, že Š môže zaručene vyhrať na nanajvýš m ťahov bez ohľadu na to, ako Devil Voršiper mieša karty?*

Riešenie: (opravoval Slavo, Dano)

Chceme zistiť, pre ktoré k vie Š zaručene vyhrať na konečný počet ťahov (potom bude existovať hľadané m). Aby sme zaručili víťazstvo, musíme predpokladať, že ak nevieme pred otáčaním o nejakom páre, tak otočením neotočíme žiaden pár. Inak povedané, budeme predpokladať, že sme úplní smoliari.

Bolo by fajn nájsť postup, ako vieme zistiť hodnotu na nejakej karte. Potom by sme týmto vedeli postupne zisťovať hodnoty aj na ostatných kartách. Keď takto zistíme hodnoty $n + 1$ kariet, tak už určite budeme vedieť aspoň o jednom páre. Ako na to?

Skúsme otočiť nejakých k kariet. Zistili sme, ktorých k hodnôt sa na nich nachádza. Avšak nevieme, ako sú teraz premiešané. Ak chceme zistiť hodnotu niektorej z nich (označíme si ju X), tak zrejme nemá zmysel otočiť ju znovu (po premiešaní by sme stále mali k možností na hodnotu na nej). Preto potrebujeme vylúčiť hodnoty, ktoré na nej nie sú. Tie hodnoty sú na ostatných $k - 1$ naposledy otočených kartách. Ak otočíme spomínaných $k - 1$ kariet (a okrem nich ešte jednu inú — keďže vieme otáčať presne k kariet), tak zistíme hodnoty na daných $k - 1$ kartách a tým pádom aj hodnotu karty X.

Zistili sme hodnotu na jednej karte, môžeme to opakovať znovu. Presnejšie povedané, najprv otočíme karty 1 až k, potom karty 2 až $k + 1$ (zistíme, čo je karte 1), potom otočíme karty 3 až $k + 2$ (zistíme, čo je na karte 2), . . . , nakoniec otočíme karty $2n - k + 1$ až $2n$ (zistíme, čo je na karte $2n - k$). Takto zistíme $2n - k$ kariet. Ak je $k < n$, tak vieme pozíciu aspoň $n + 1$ kariet. Keďže párov je n, z nejakého páru poznáme obe karty, teda v ďalšom ťahu ich budeme vedieť otočiť — **Š vyhrá**.

Čo sa stane, ak $n = k$? Predošlým postupom vieme zistiť, čo je na k kartách (označíme si ich A). Môže sa nám stať, že karty A sú z rôznych párov. Síce teraz nevieme hneď povedať pozíciu nejakého páru, ale aj tak vieme o kartách celkom veľa. Jediná vec, ktorú nevieme, je usporiadanie k kariet, ktoré sme naposledy otočili (označíme si ich B).

Ďalším otočením otočíme k kariet — niekoľko kariet zo skupiny A a niekoľko z B (pokojne aj 0 kariet zo skupiny). Môže sa nám stať, že otočené karty z B sú páry neotočených kariet z A, teda týmto otočením nenájdeme pár.

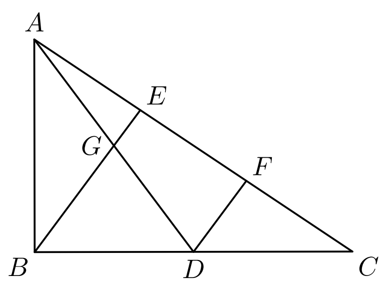
Práve sme ukázali, že ak máme k kariet (z každého páru po jednej), o ktorých nevieme, ako sú usporiadané, tak v najbližšom ťahu nevieme vyhrať. Lenže v takej situácii môžeme byť vždy — pred ľubovoľným otočením nevieme povedať o usporiadaní naposledy odkrytých kariet (čo, keďže sme neskončili, bolo k kariet z rôznych párov), a teda ani týmto otočením nenájdeme pár. Tým pádom pre $k = n$ **Š nemusí vyhrať na konečný počet ťahov**.

Víťazstvo Š pre $k = n$ nevieme zaručiť (teda neexistuje hľadané m), pre $k < n$ ho zaručiť vieme (vtedy je jedno z možných $m = 2n - k + 2$).

Úloha č. 6: *Devil Voršiper nemá rád osi. Preto ani jeho kúzelný magický symbol žiadne osi neobsahuje. Jeho symbol tvorí trojuholník ABC, v ktorom D je stred strany BC. Bod E leží na strane AC tak, že platí $2|AE| = |CE|$. Naviac platí, že $|\sphericalangle CBE| = |\sphericalangle ADB|$. Určte veľkosť uhla ABC.*

Riešenie: (opravoval Pedro, Ľubo)
Potrebujeme nejako využiť to, že bod E sa nachádza v jednej tretine strany AC. To sa ale len tak ľahko využiť nedá, teda určite nie vyjadrením nejakého uhla. Možno by mohlo pomôcť, keby sme sa do úlohy pustili goniometricky, takýto postup však necháme na odvážnejších. Čo keby sme si radšej dodefinovali bod F tak, že leží presne v strede úsečky EC? Takéto dodefinovanie by nám zároveň implikovalo, že bod E leží v strede úsečky AF, pretože F delí dve tretiny úsečky AC na polovicu, teda na tretiny úsečky AC. Vidíme že $|AE| = |EF| = |FC|$.

Všimnime si úsečku DF. Oba krajné body tejto úsečky sú stredmi nejakých strán, konkrétne strán trojuholníka BCE. Teda DF je jeho strednou priečkou. O stredných priečkach vieme, že sú rovnobežné s tou stranou trojuholníka, ktorej sa nedotýkajú. Lenže my vieme, že bod E leží v strede AF a zároveň $DF \parallel BE$, teda časť úsečky BE je strednou priečkou v trojuholníku ADF. Dodefinujúc si bod G ako priesečník AD a BE získavame, že G je stredom AD. Lenže z rovností uhlov CBE a ADB máme, že trojuholník BDG je rovnoramenný so základňou BD, a teda $|BG| = |DG|$. Lenže to máme $|BG| = |DG| = |AG|$, čiže bod G je stredom kružnice opísanej trojuholníku ABD. Z Tálesovej vety vyplýva, že keďže AD je priemerom tejto kružnice, tak $|\sphericalangle ABC| = 90°$.



Obr. 3

Úloha č. 7: *V Krajine osí ôs namiesto zvierat chovajú čísla. Farmárka Felícia chová reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kde $n \geq 2$ je dané prirodzené číslo. Ich dolné celé časti $\lfloor x_1 \rfloor, \lfloor x_2 \rfloor, \ldots, \lfloor x_n \rfloor$ majú v nejakom poradí hodnoty $1, 2, \ldots, n$ (každú práve raz). Nájdite maximálnu a minimálnu hodnotu výrazu*

$$\lfloor x_2 - x_1 \rfloor + \lfloor x_3 - x_2 \rfloor + \lfloor x_4 - x_3 \rfloor + \cdots + \lfloor x_n - x_{n-1} \rfloor.$$

Zápis $\lfloor a \rfloor$ označuje dolnú celú časť reálneho čísla a, t. j. najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje a.

Riešenie: (opravovali Jožo a Marián)
Je celkom intuitívne, že pre maximalizovanie súčtu sa zíde maximalizovať jednotlivé sčítance.[4] Tak sa na ne pozrime. Každý sčítanec má tvar $\lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor$. Zo zadania vieme niečo o hodnotách $\lfloor x_{i+1} \rfloor$ a $\lfloor x_i \rfloor$. Intuitívne sa výraz $\lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor$ správa podobne ako $\lfloor x_{i+1} \rfloor - \lfloor x_i \rfloor$. Iné umiestnenie dolných celých častí ho len málo pozmení. My však potrebujeme presne určiť, o koľko sa môže zmeniť.

Každé reálne číslo x sa dá jednoznačne vyjadriť pomocou jeho celej časti $\lfloor x \rfloor$ a desatinnej časti, ktorá sa označuje $\{x\}$ a je z intervalu $\langle 0, 1)$. Ak toto vyjadrenie dosadíme do skúmaného sčítanca, dostaneme

$$\lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor = \lfloor \lfloor x_{i+1} \rfloor - \lfloor x_i \rfloor + \{x_{i+1}\} - \{x_i\} \rfloor.$$

Pripočítavanie celého čísla $\lfloor x_{i+1} \rfloor - \lfloor x_i \rfloor$ neovplyvňuje celú časť výsledku. Môžeme ju preto vybrať z dolnej celej časti, čím dostaneme

$$\lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor = \lfloor x_{i+1} \rfloor - \lfloor x_i \rfloor + \lfloor \{x_{i+1}\} - \{x_i\} \rfloor. \tag{1}$$

Tu si môžeme všimnúť, že desatinná časť $\{x_{i+1}\}$ je vždy menšia ako 1 a odčítaním kladného čísla $\{x_i\}$ sa na tom nič nemôže pokaziť. Teda $\lfloor \{x_{i+1}\} - \{x_i\} \rfloor \leq 0$. Obdobne, odčítaním čísla menšieho než 1 od kladného čísla nikdy nedostaneme nič menšie než -1. Teda $\lfloor \{x_{i+1}\} - \{x_i\} \rfloor \geq -1$. Keďže $\lfloor \{x_{i+1}\} - \{x_i\} \rfloor$ je celé číslo, tak môže nadobúdať len hodnoty -1 a 0.

[4] Vo všeobecnosti sa nám to však nemusí podariť. Môže sa stať, že sa jednotlivé sčítance budú navzájom ovplyvňovať a nenadobudnú všetky naraz maximálnu hodnotu. Vtedy musíme rozobrať tie závislosti a nájsť lepší odhad výrazu. V tejto úlohe to však nebude potreba.

Teraz si môžeme výraz zo zadania upraviť pomocou rovnosti (1). Dostaneme v ňom tak dolné celé časti $\lfloor x_1 \rfloor$, $\lfloor x_2 \rfloor$, ..., $\lfloor x_n \rfloor$, o ktorých niečo vieme zo zadania. Väčšina z nich nám vypadne a ostane nám

$$\lfloor x_2 - x_1 \rfloor + \lfloor x_3 - x_2 \rfloor + \cdots + \lfloor x_n - x_{n-1} \rfloor =$$

$$= \lfloor x_n \rfloor - \lfloor x_1 \rfloor + \lfloor \{x_2\} - \{x_1\} \rfloor + \lfloor \{x_3\} - \{x_2\} \rfloor + \cdots + \lfloor \{x_n\} - \{x_{n-1}\} \rfloor.$$

Pozrime sa teraz na najväčšiu hodnotu tohto výrazu. Sčítanec $\lfloor x_n \rfloor$ môže byť najviac n, $-\lfloor x_1 \rfloor$ môže byť najviac -1 a zvyšné sčítance $\lfloor \{x_{i+1}\} - \{x_i\} \rfloor$ sú najviac 0. Teda najväčšia hodnota, ktorú by sme mohli dosiahnuť, je $n-1$. Vieme však túto hodnotu naozaj dosiahnuť? Očividne áno, stačí nám zvoliť si $x_i = i$.

Podobne, keď chceme zistiť najmenšiu hodnotu, tak platí $\lfloor x_n \rfloor \geq 1$, $-\lfloor x_1 \rfloor \geq -n$ a zvyšné sčítance sú aspoň -1. To nás privedie k najmenšej hodnote $-2(n-1)$, ktorú dostaneme, ak dosadíme čísla, pre ktoré $\lfloor x_1 \rfloor = n$, $\lfloor x_n \rfloor = 1$ a desatinné časti $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, ..., $\{x_n\}$ tvoria klesajúcu postupnosť. Také čísla zjavne existujú, čo nám stačí. Keď sa však trochu pohráme s písmenkami, zvolíme $\lfloor x_i \rfloor = n + 1 - i$ a $\{x_i\} = 1 - i/n$, tak vieme takto zapísať aj jeden konkrétny príklad: $x_i = n + 1 - i + 1 - i/n$.

Najmenšia hodnota Felíciinho výrazu je teda $-2(n-1)$ a najväčšia hodnota je $n-1$.

Úloha č. 8: *Felícia na svojej farme chová aj funkcie, ktorým dáva papať čísla. Nedávno ich nakŕmila nulami, ktoré nemajú rady, tak jej všetky poutekali. Pomôžte jej nájsť ich!*
Nájdite všetky funkcie[5] $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *také, že pre všetky nenulové reálne čísla* x, y *platí*

$$x \cdot f(xy) + f(-y) = x \cdot f(x).$$

Riešenie: (opravoval Zajo)
Typickou metódou riešnia funkcionálnych rovníc je dosadzovanie konkrétnych hodnôt za neznáme. Vieme totiž, že rovnica zo zadania musí platiť pre všetky dvojice x, $y \in R \setminus \{0\}$. Dosadením konkrétnych dvojíc vieme dostať tvar rovnice, ktorý nám hovorí niečo bližšie o funkcii f.

Vo všeobecnosti je naším cieľom postupným dosádzaním rovnicu upraviť do tvaru $f(x) = \ldots$, kde na pravej strane môžu vystupovať iba výrazy závislé od x, y, prípadne funkčné hodnoty v konkrétnych bodoch. Sedliacky povedané, na pravej strane nebude nikde x, y v argumente funkcii f.

Rozumnými dosadeniami na začiatok sú čísla ako 0, ± 1. Nulu dosadzovať nemôžeme, zo zadania nie je v definičnom obore. Ostávajú nám teda štyri možnosti, vieme dosadiť ± 1 za x aj za y. V tejto úlohe už nič ďalšie dosádzať ani nepotrebujeme.

Pozrime sa na dve z týchto štyroch dosadení, ktoré pre nás budú zaujímavejšie. Po dosadení $x = 1$ dostávame

$$f(y) + f(-y) = f(1)$$

a po dosadení $y = -1$ zas

$$xf(-x) + f(1) = xf(x).$$

Ako cieľ sme si stanovili dostať vyjadrenie tvaru $f(x) = \ldots$ a práve sme dostali dve rovnice, v ktorých vystupujú len dva výrazy, ktoré nemôžu byť na pravej strane konečného vyjadrenia. Jedná sa o $f(x)$, $f(-x)$, resp. $f(y)$, $f(-y)$ (v jednej rovnici neznámu síce voláme x a v druhej y, ale obe rovnice platia pre všetky x, y z definičného oboru, poľahky by sme preto neznámu v jednej z rovníc mohli preoznačiť).

Stačí nám teda vyriešiť sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych. Z prvej rovnice vyjadrime:

$$f(-y) = f(1) - f(y), \quad \text{teda platí aj} \quad f(-x) = f(1) - f(x),$$

čo rovno dosadíme do druhej rovnice a vyjadríme $f(x)$:

$$x(f(1) - f(x)) + f(1) = xf(x),$$

$$f(x) = \frac{f(1)(x+1)}{2x} = \frac{f(1)}{2}\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

V tomto tvare $f(1)$ môžeme chápať ako nejakú konštantu, typickú pre túto funkciu. Vo funkcionálnych rovniciach môže nastať takáto situácia, že vieme vyjadriť všetky funkčné hodnoty v závislosti od jednej konkrétnej. Prirodzenou otázkou je teraz to, aká môže byť tá jedna zaujímavá funkčná hodnota $f(1)$?

[5] Pokiaľ ste sa ešte nestretli s úlohou tohto typu, odporúčame vám pozrieť si stránky
`https://old.kms.sk/~mazo/matematika/funkcionalne_rov.pdf`
a `http://mks.mff.cuni.cz/library/FunkcionalniRovniceVM/FunkcionalniRovniceVM.pdf`.

Odpoveďou nemusí byť jedna hodnota, môže to byť ľubovoľná množina hodnôt. Už v zadaní vidíme, že máme nájsť všetky funkcie spĺňajúce rovnicu, nie len jednu. A ani v tomto prípade tomu nebude inak. Ukáže sa totiž, že pre ľubovoľnú reálnu hodnotu $f(1)$ bude funkcia f s naším predpisom spĺňať zadanie.

Ako to dokázať je pomerne intuitívne a síce skúškou (na ktorú pri takýchto príkladoch nemôžeme zabudnúť, lebo skoro vždy robíme dôsledkové úpravy), teda dosadením nášho záveru do zadania:

$$Ľ = xf(xy) + f(-y) = x\frac{f(1)}{2}\left(1+\frac{1}{xy}\right) + \frac{f(1)}{2}\left(1+\frac{1}{-y}\right) = \frac{f(1)}{2}\left(x+\frac{1}{y}+1-\frac{1}{y}\right) = \frac{f(1)}{2}(x+1)\,,$$

$$P = xf(x) = \frac{f(1)}{2}x\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{f(1)}{2}(x+1)\,.$$

Vidíme, že ľavá a pravá strana sa rovnajú pre ľubovoľnú hodnotu $f(1)$. Množinou riešení sú preto funkcie

$$f(x) = c\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

kde c je ľubovoľné reálne číslo.

<u>Úloha č. 9:</u> *Š nie je uznávaným čarodejníkom Krajiny osí ôs len tak pre nič za nič. Je majstrom v čarovaní osí. Jeho najsilnejšie kúzlo pozostáva z trojuholníka ABC. Os uhla CAB pretína stranu BC v bode L a os uhla CBA pretína stranu AC v bode K. Os úsečky (teda os osi) BK pretína priamku AL v bode M. Bod N leží na priamke BK tak, že priamky LN a MK sú rovnobežné. Dokážte, že $|LN| = |NA|$.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Mišo)
Na to, aby sme vyriešili úlohu, potrebujeme zistiť niečo viac o bodoch N a M. Začneme s bodom M, lebo bod N je udaný pomocou neho. Bod M je priesečníkom osi strany BK a osi uhla BAK. Pripomína vám to niečo? Bod M musí ležať na kružnici opísanej trojuholníku ABK, lebo je priesečníkom jeho osi uhla a osi protiľahlej strany, takže je Švrčkovým[6] bodom k bodu B.

Označme si I stred vpísanej kružnice trojuholníka ABC. Je to zaujímavý bod, lebo leží na priesečníku uhlopriečok tetivového štvoruholníka $ABMK$. Z jeho mocnosti ku kružnici opísanej štvrouholníku $ABMK$ vyplýva $|AI||IL| = |BI||IN|$. Bod I je zároveň stredom rovnoľahlosti úsečiek MK a LN. To vieme ukázať pomocou toho, že trojice bodov I, M, L a I, K, N sú kolineárne (t. j. ležia na jednej priamke) a zároveň priamka KM je rovnobežná s priamkou LN. Z rovnoľahlosti získame druhú rovnosť pomerov $|IM| : |IL| = |IK| : |IN|$.

Skombinovaním oboch rovností pomerov získame rovnosť $|AI||IL| = |BI||IN|$, takže z mocnosti bodu I vieme povedať, že štvoruholník $ABLN$ je tiež tetivový. Keď už vieme, že $ABLN$ je tetivový štvoruholník, stačí nám preniesť pár obvodových uhlov. $|\sphericalangle NAL| = |\sphericalangle NBL|$, $|\sphericalangle ALN| = |\sphericalangle ABN|$. Navyše obe časti sú polovice uhla ABC, takže sú rovnaké. Trojuholník ALN je preto rovnoramenný so základňou AL, z čoho vyplýva dokazované tvrdenie $|AN| = |NL|$.

<u>Úloha č. 10:</u> *V Krajine osí ôs majú šachovnice nezvyčajných rozmerov, ktoré ešte nezvyčajnešie farbia tromi farbami. Políčka šachovnice $(n+1)\times(n-1)$ sú zafarbené tromi farbami tak, že neexistuje dvojica riadkov a dvojica stĺpcov, pre ktoré majú štyri políčka na ich prieniku rovnakú farbu. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu prirodzeného čísla n, pre ktoré je to možné.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Vodka)
Riešenie takýchto úloh pozostáva vždy z dvoch častí. Najprv ukážeme, že pre $n > N$ takú šachovnicu zostrojiť nemôžeme a potom ukážeme že pre $n = N$ sa taká šachovnica zostrojiť dá. Len potom môžeme s istotou povedať, že najväčšie možné n je rovné N. Prísť na hodnotu N samozrejme nie je vždy ľahké, často sa stane, že ukážeme, že napr. pre $n > 47$ to nejde, ale pre $n = 42$ to vieme. Potom musíme jednu alebo obe časti urobiť lepšie, t.j. vylepšiť odhad a/alebo nájsť konštrukciu pre väčšie n.

V našej úlohe ukážeme, že $N = 10$. Teda najprv ukážeme, že pre $n > 10$ sa tak šachovnica ofarbiť nedá. Je jasné, že stačí, ak ukážeme, že sa to nedá pre $n = 11$. Ak by sa to totiž dalo pre väčšie n, tak šachovnica, ktorú dostaneme pre väčšie n, obsahuje aj šachovnicu 12×10. Poďme teda ukázať, že šachovnica 12×10 sa nedá zafarbiť podľa podmienok zadania.

Predpokladajme (sporom), že sa tak zafarbiť dá. Zoberme si teda jej vhodné zafarbenie a označme b_i, c_i, r_i počty bielych, čiernych a ružových[7] políčok v i-tom riadku. Zjavne platí $b_i + c_i + r_i = 10$, pre všetky $1 \le i \le 12$. Poďme teraz spočítať počet (neusporiadaných) dvojíc bielych políčok, ktoré sú v jednom riadku. Označme si ich počet ako B. Pre každú dvojicu stĺpcov existuje najviac jedna taká dvojica, že jedno políčko je v prvom stĺpci a druhé v druhom stĺpci. Ak by boli dve, tak by vytvorili štvoricu bielych políčok, ktoré ale podľa zadania neexistujú. Preto

[6] Tu by bolo vhodné vás upozorniť, že aj keď *Švrčkov bod* používame hojne, nie je to oficiálny názov a používa sa iba v niektorých českých a slovenských matematických seminároch.

[7] Je jasné, že to môžeme BUNV farbiť bielou, čiernou a ružovou.

$B \leq \binom{10}{2} = 45$. Na druhú stranu môžme tento počet spočítať po riadkoch. V i-tom riadku je takýchto dvojíc zrejme $\binom{b_i}{2}$. Preto

$$B = \binom{b_1}{2} + \binom{b_2}{2} + \cdots + \binom{b_{12}}{2}.$$

Úplne analogicky spočítame dvojice takých čiernych a ružových políčok, ich počty označíme C a R. Zrejme platí $C, R \leq 45$.

$$C = \binom{c_1}{2} + \binom{c_2}{2} + \cdots + \binom{c_{12}}{2}, \qquad R = \binom{r_1}{2} + \binom{r_2}{2} + \cdots + \binom{r_{12}}{2}.$$

Ďalej si uvedomíme nerovnosť

$$\binom{b_i}{2} + \binom{c_i}{2} + \binom{r_i}{2} \geq \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2} = 12.$$

Dá sa to dokázať dvoma spôsobmi. Prvý je ten, že

$$\binom{b_i}{2} + \binom{c_i}{2} + \binom{r_i}{2} = \frac{1}{2}(b_i^2 - b_i + c_i^2 - c_i + r_i^2 - r_i) = \frac{1}{2}(b_i^2 + c_i^2 + r_i^2) - 5.$$

To znamená , že keď hľadáme minimálnu hodnotu toho súčtu, tak vlastne len minimalizujeme súčet druhých mocnín b_i, c_i, r_i. A keďže ich súčet je 10 (konštantný), tak je najmenší, ak sú čo najbližšie pri sebe, teda $(4, 3, 3)$ v nejakom poradí[8]. Alebo ak sme leniví, tak keďže sú to malé celé čísla, stačí proste vyskúšať pár možností. Totiž ak je jedno z nich aspoň 6, tak už $\binom{6}{2} > 12$. A ak nie tak stačí preveriť možnosti $(4, 3, 3), (4, 4, 2), (5, 5, 0), (5, 4, 1), (5, 3, 2)$ a naozaj to vyjde.

Potom ale dostávame, že

$$135 \geq B + C + R = \binom{b_1}{2} + \binom{c_1}{2} + \binom{r_1}{2} + \cdots + \binom{b_{12}}{2} + \binom{c_{12}}{2} + \binom{r_{12}}{2} \geq 12 \cdot 12 = 144.$$

To je samozrejme spor, a preto pre $n = 11$ taká šachovnica neexistuje.

Teraz ukážeme také ofarbenie šachovnice 11×9. V skutočnosti trochu zafrajerujeme a ukážeme ofarbenie dokonca pre šachovnicu 12×9. Označme si stĺpce číslami od 1 po 9 (snáď to šachisti prežijú). Napíšme si teraz čísla do tabuľky 3×3 takto:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Teraz si vieme vytvoriť 12 trojíc čísel ako riadky, stĺpce a uhlopriečky tejto tabuľky, kde uhlopriečky berieme „akoby to bol torus“, t.j. prechádzame cez kraje tabuľky. Skrátka sú to tieto: 123, 456, 789; 147, 258, 369; 159, 267, 348; 168, 249, 357. Nazvime tieto trojice ako *magické*. Všimnime si, že každá dvojica čísel sa nachádza práve v jednej magickej trojici (čo je zjavné, lebo každé dve políčka určujú jednu líniu).

Konštrukcia našej šachovnice 12×9 je už jednoduchá — v každom riadku zafarbíme nabielo políčka z troch stĺpcov ktoré sú v jednej magickej trojici (a pre každý riadok použijeme inú). Potom triviálne nebude existovať taká štvorica bielych políčok, ktorá by kazila podmienku.

No a čo spravíme s čiernymi a ružovými políčkami? V podstate to isté. Všimneme si, že magické trojice, sa dajú rozdeliť do trojíc (no krása) tak, že v každej trojici magických trojíc (:D) sa každé číslo od 1 do 9 nachádza práve raz. Toto rozdelenie som už pred tým naznačil bodkočiarkami a zodpovedá to rozdeleniu na riadky, stĺpce a uhlopriečky jedným a druhým smerom. Zoberme si jednu takú trojicu napr. tú, ktorá zodpovedá riadkom tabuľky 3×3, t.j. 123, 456 a 789.

Bielou sme zafarbili napr. v prvom riadku stĺpce 123, v druhom 456 a v treťom 789. Pre čiernu a ružovú to len posunieme — v prvom riadku budú čierne 456 a ružové 789, v druhom čierne 789, ružové 123 a v treťom čierne 123 a ružové 456. Toto spravíme aj s ostatnými trojicami magických trojíc. Tak dosiahneme to, že aj čiernou, aj ružovou sú v každom riadku zafarbené políčka z nejakej magickej trojice stĺpcov a znovu v každom riadku z inej — a to znamená, že nenájdeme ani 4 čierne, ani 4 ružové políčka, ktoré by mi nám to pokazili. Teda taká šachovnica 12×9 existuje.

Preto najväčšie možné n je $n = 10$.

Tu by som riešenie mohol skončiť, ale dal som si tú námahu, že pre tých ktorým by to nebolo úplne jasné, som ručne vyplnil aj celú šachovnicu 12×9:

[8] Ak tomu neveríte, dokážte si, že ak $x - y > 1$, tak $(x-1)^2 + (y+1)^2 < x^2 + y^2$.

B	B	B	C	C	C	R	R	R
R	R	R	B	B	B	C	C	C
C	C	C	R	R	R	B	B	B
B	C	R	B	C	R	B	C	R
R	B	C	R	B	C	R	B	C
C	R	B	C	R	B	C	R	B
B	C	R	R	B	C	C	R	B
R	B	C	C	R	B	B	C	R
C	R	B	B	C	R	R	B	C
B	C	R	C	R	B	R	B	C
R	B	C	B	C	R	C	R	B
C	R	B	R	B	C	B	C	R

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	P	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
1.	Dávid Mišiak	2	GJH	4	90	9		9	9	9	9		135
2.	Marián Poturnay	2	GPiešť	4	89	9		9	9	9	9		134
3.	Tomáš Sásik	3	GAMČA	8	87			9	9	9	9	9	132
4.	Pavol Kollár	2	GAMČA	5	87			9	9	9	9	4	127
5.	Martin Števko	2	GAlKE	4	76	9		6	9	9	9		118
6.	Lucia Krajčoviechová	1	GJH	3	72	9	9	9	9		9		117
7.	Ákos Záhorský	3	GŠahy	7	82			9	9		9	6	115
8.	Samuel Krajči	2	GAlKE	5	79		9	9	8	9			114
9.	Matej Moško	2	GAMČA	4	66	9	9	9	7	9			109
10.	Peter Ralbovský	4	GJH	11	72			9	7	9	9		106
11.	Pavol Kebis	2	GJH	4	60	9	9	9	9	9			105
12.	Miro Macko	1	Leaf	2	64	9	9	9	8	4			103
13.	Štefánia Glevitzká	2	GPriev	4	56	9	9	9	9	9			101
14.	Viktória Brezinová	2	GAlKE	4	60	9	3	9	9	9			99
15.	Róberta Juríková	2	Iná škola	3	52	9	9	9	9	9			97
16.	Monika Machalová	2	GJH	4	71	9	6	9					95
17.	Michal Horanský	1	ŠpMNDaG	2	59	9	6	9	3	8			94
18.	Mária Ďuračková	2	GJH	4	55	9	9	9	8				90
18.	Tereza Prokopová	2	GJH	4	61	0	6	9	5		9		90
20.	Peter Onduš	3	ŠpMNDaG	6	62		6	9	9	2			88
21.	Jakub Pravda	1	ŠpMNDaG	2	66	9	6	4	2				87
22.	Jonáš Dujava	2	SPlPO	4	57	9	8	9					83
23.	Michal Staník	2	GĽŠTN	4	55	9		9	9				82
24.	Michal Molnár	2	GAMČA	4	44	9	6	9			9		77
25.	Richard Oravkin	2	GBajkBA	4	58	0	9			9			76
25.	Jozef Fülöp	1	GAMČA	3	49	9			9	9			76
27.	Nina Benková	2	GPiešť	4	46	9	9	9					73
28.	Daniel Magula	3	GPiaNT	4	46	9	5	9	3				72
28.	Eliška Macáková	6zš	SZScenada	-3	43	0	5	9	7	8			72
30.	Lukáš Baláž	2	GBánov	3	44		9	9		9			71
30.	Michaela Ždímalová	2	GJH	3	46	7	6	9	3				71
32.	Pavol Klein	2	GPiešť	4	47		9	9		4			69
33.	Martina Kalašová	2	GJH	3	37	9	6	9	7				68
34.	Timea Szöllősová	1	GAMČA	1	36	9	3	9	2	8			67
35.	Tomáš Ganz	1	ŠpMNDaG	2	40	9	4	9	4		0		66
36.	Karolína Pisoňová	2	GBánov	4	30	9	8	9	9				65

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	P	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
37.	Jakub Parada	1	GAMČA	3	46	0	3		9	5			63
38.	Matúš Zubčák	2	GPárNT	4	44	9		9					62
39.	Filip Čermák	3	Iná škola	3	34			9	9	9			61
40.	Erik Řehulka	1	ŠpMNDaG	2	41	9	7		3		0		60
41.	Radek Olšák	2	Iná škola	3	50		9						59
42.	Jakub Poljovka	3	GPárNT	7	49		0	9					58
43.	Veronika Ganzová	3	GMerTT	4	35	9	7		3				54
44.	Miška Dlugošová	3	GPUK	7	48								48
44.	Jozef Číž	2	GJH	4	33	5	6			4			48
46.	Tatiana Matejkova	1	GPárNT	2	28	9	6						43
47.	Marianna Hronská	9zš	BiGSuč	1	29	0	9	1					39
48.	Katarína Studeničová	3	GDKubí	5	16		7	9	3	2		1	38
49.	Jaroslav Paška	2	ŠpMNDaG	3	34	1		0		2			37
50.	Lenka Kopfová	2	Iná škola	4	0			9	9	9	9		36
51.	Alan Marko	3	Leaf	7	31								31
52.	Martina Šuchová	3	GPárNT	6	17		1	9					27
53.	Hana Kluvancová	1	GPárNT	1	17			9				0	26
53.	Juraj Rosinský	2	I de Lancy	3	26								26
55.	Jana Černíková	2	GJH	3	15	1	8	1					25
56.	Michal Mráz	2	ŠpMNDaG	4	24								24
57.	Svetlana Rampašeková	1	GPárNT	1	9			9				0	18
58.	Kristina Galikova	2	ŠpMNDaG	4	7								7
59.	Lucia Ondovčíková	2	GModra	4	4								4

kategória ALFA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	P	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
1.	Miro Macko	1	Leaf	2	88		9	9	9	9	9	8	133
2.	Lucia Krajčoviechová	1	GJH	3	81			9	9	9	9	9	126
3.	Michal Kajan	1	GBajkBA	2	85		9	3	2	9	9	8	123
4.	Barbora Barančíková	1	ŠpMNDaG	2	79		9	9	9	6	9		121
5.	Eliška Macáková	6zš	SZScenada	-3	81	9	9	1	0	5	9	7	120
6.	Jakub Pravda	1	ŠpMNDaG	2	82		9	9	9	6	4	2	119
7.	Matej Priesol	1	ŠpMNDaG	2	85		9	1	9	0	9	4	117
8.	Róberta Juríková	2	Iná škola	3	70			9	9	9	9	9	115
9.	Timea Szöllősová	1	GAMČA	1	74	8			9	3	9	2	105
10.	Erik Řehulka	1	ŠpMNDaG	2	71		9	5	9	7		3	104
11.	Tomáš Ganz	1	ŠpMNDaG	2	64		9	1	9	4	9	4	99
12.	Tatiana Matejkova	1	GPárNT	2	58		9	9	9	6			91
13.	Kornélia Nemcová	1	GAMČA	2	54		9	2	9		8	7	89
14.	Martin Starovič	1	GAMČA	2	70		9		9	0			88
15.	Kristína Grolmusová	1	BiGSuč	1	64	9	9	1	0		1	1	85
16.	Filip Csonka	2	GAlKE	2	62		9	3					74
17.	Alex Chudíc	1	ŠpMNDaG	2	45		9	1	9	8			72
17.	Patrik Rusnák	1	GAlKE	2	54			9			9		72
19.	Matej Hanus	1	GPošKE	2	62			?	9				71
19.	Michal Masrna	1	GPošKE	2	71								71
21.	Michal Horanský	1	ŠpMNDaG	2	39				9	6	9	3	66
22.	Martina Kalašová	2	GJH	3	34				9	6	9	7	65
23.	Tánička Bielaková	1	GAMČA	2	39		9	3		5	7		63
24.	Michaela Ždímalová	2	GJH	3	37				7	6	9	3	62
25.	Alexandra Géciová	1	GJH	1	36	7	9	9					61
26.	Jasmína Portašiková	2	GVarZA	3	35			9	3	9		4	60
27.	Jozef Fülöp	1	GAMČA	3	40				9			9	58

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**P**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	$\sum$
28.	Lukáš Gáborik	9zš	ZSRadBB	0	54								54
29.	Lukáš Baláž	2	GBánov	3	35					9	9		53
29.	Ondrej Tomášik	1	GTajBB	1	28	1	9	1	9		5		53
29.	Gabriela Šavelová	1	GAMČA	2	51			2					53
32.	Jitka Muravská	1	GAMČA	1	42	8							50
33.	Hana Kluvancová	1	GPárNT	1	31		9				9		49
34.	Marianna Hronská	9zš	BiGSuč	1	37				0	9	1		47
35.	Jakub Parada	1	GAMČA	3	34				0	3		9	46
36.	Filip Čermák	3	Iná škola	3	25						9	9	43
37.	Adam Kuniak	1	GAMČA	1	42								42
37.	Radek Olšák	2	Iná škola	3	33					9			42
39.	Tomáš Šumšala	1	GJH	2	23		9	9					41
39.	Andrej Pečimúth	3	GNZám	3	41								41
41.	Jana Černíková	2	GJH	3	30				1	8	1		40
41.	Svetlana Rampašeková	1	GPárNT	1	22	0		9			9		40
43.	Jaroslav Paška	2	ŠpMNDaG	3	33				1		0		34
44.	Anežka Pajunková	1	Iná škola	2	23	?		5					28
44.	Andrej Genčur	1	Iná škola	2	24	9	4						28
46.	Matej Vojtek	1	GAMČA	2	27								27
47.	Karin Demková	1	GJH	2	26								26
47.	Róbert Sabovčík	1	GPošKE	1	26								26
49.	Juraj Rosinský	2	I de Lancy	3	24								24
49.	Martin Koutenský	1	GAMČA	2	24								24
51.	Adam Barla	1	GTajBB	1	22								22
52.	Alžbeta Jurečeková	2	ezsmt	3	19								19
53.	Tomáš Šimek	9zš	ŠpMNDaG	0	18								18
54.	Jakub Hluško	2	ŠpMNDaG	2	17								17
54.	Karin Ghirbaková	2	GAMČA	2	17								17
56.	Marek Tran	1	GAMČA	2	16								16
57.	Ema Hartmannová	2	GPriev	2	13								13
58.	Natalia Calvo	1	GPárNT	2	10								10
59.	Matúš Tamáši	2	Iná škola	2	9								9
60.	Laura Sládečková	2	GVarZA	2	9								9
61.	Andrej Bederka	2	ŠpMNDaG	2	5								5
62.	Natália Grigová	1	GAMČA	1	4								4
62.	Jana Viktória Kováčiková	3	Iná škola	3	4								4
64.	Michal Vranovský	1	GCSLewis	2	2								2