Korešpondenčný matematický seminár
XXXIX. ročník, 2017/2018
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Kvetinky musím sadiť

opravovali **Veronika a Rado**

Zadanie. *Veronika a Aňa sadia kvetinky v záhrade s rozmermi 7×8. Záhrada je rozdelená na štvorčekové políčka 1×1. Veronika sadí fialové kvetinky a Aňa sadí ružové kvetinky. Dievčatá sa striedajú v sadení a tá, ktorá zasadí poslednú kvetinku, prehrá. Dievča, ktoré je na ťahu, rozdelí pole na dve časti čiarou rovnobežnou so stranou poľa. Potom si vyberie jednu časť poľa, ktorá obsahuje aspoň jedno voľné políčko, a na všetky voľné políčka tej časti vysadí svoje kvetinky. Ak začína Aňa, ktoré z dievčat má víťaznú stratégiu?*[1]

Aňa a Veronika sadia kvetinky. Poďme sa na to ich sadenie pozrieť odzadu. Zo zadania vieme, že komu zostane len jedno voľné políčko 1×1, prehráva. Dievča, ktorému zostane len jeden rad veľkosti $1 \times n_1$, kde $n_1 \in \{2, \ldots, 8\}$, vyhráva, keď rozdelí rad na dve časti: na políčka $1 \times (n_1 - 1)$ vysadí kvetinky a políčko 1×1 nechá voľné pre druhé dievča. Pri veľkosti záhradky $2 \times n_2$, kde $n_2 \in \{3, \ldots, 8\}$, vyhráva dievča, ktoré je na ťahu, lebo vysadí kvietky na všetky políčka okrem štvorca 2×2. Druhému dievčaťu teda zostal štvorec 2×2 a musí zasadiť kvietky jediným spôsobom, a to tak, že zostane rad veľkosti 1×2 (čo je pre ňu prehrávajúca situácia).

Pri veľkosti záhradky $3 \times n_3$, kde $n_3 \in \{4, \ldots, 8\}$, znovu vyhráva dievča, ktoré je na ťahu. Dievča vysadí kvietky na všetkých políčkach okrem štvorca 3×3. Druhé dievča musí skrátiť pole na buď 2×3, čím prvé dievča môže skrátiť pole na 2×2 a táto situácia je pre druhé dievča prehrávajúca, alebo 1×3, čím prvé dievča skráti pole na 1×1 a druhé dievča opäť prehráva. Analogicky sa to dá ukázať aj pre ďalšie veľkosti záhradky $4 \times n_4$, kde $n_4 \in \{5, \ldots, 8\}$, až $7 \times n_7$, kde $n_7 \in \{8\}$. Všimnime si, že dievča, ktoré je na ťahu a má pred sebou štvorcovú plochu prehrá. Môže teda Aňa vyhrať? Áno. Stačí, ak bude Veronike od začiatku nechávať štvorce $n \times n$, pre vhodné $n \in \{1, \ldots, 7\}$.

Aňa začne svoj prvý ťah tak, že vysadí kvietky v ôsmom rade, čím nechá 7×7 políčok pre Veroniku. Nezáleží na tom kam Veronika teraz vysadí kvietky, Aňa ju vždy bude vedieť „dorovnať do štvorca“. Veronika bude musieť sadiť stále v menšom a menšom štvorci, až kým bude sadiť v štvorci 1×1, čím prehrá. Aňa má víťaznú stratégiu a keďže začína na poli 7×8, vie vždy vyhrať.

1.2 Kôpka Mincí on the Stôl

opravoval **Dominik**

Zadanie. *Adam a Milan hrajú hru. Na začiatku majú na stole kôpku n mincí. Adam začína a následne sa s Milanom striedajú v ťahoch. Vo svojom ťahu hráč zoberie z kôpky taký počet mincí, ktorý je deliteľom aktuálneho počtu mincí na kôpke, avšak nesmie zobrať všetky mince. Hráč, ktorý je na ťahu a na stole leží len jedna minca, prehráva. V závislosti od prirodzeného čísla n určte, ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu.*[2]

Keď začíname riešiť takúto úlohu, je dobré uvedomiť si, čo očakávame na konci, keď riešenie dopíšeme. Zvyčajne, keď sa pýtame na to, pre ktoré n má niečo platiť, potrebujeme ukázať, prečo to pre niektoré n platí a pre žiadne iné nie. V tomto prípade si za takúto otázku môžeme zvoliť to, pre aké n má víťaznú stratégiu ten, kto je práve na ťahu – či už ho budeme volať Adam alebo Milan, to je nám vo všeobecnosti jedno.

V úlohách ako táto je dobrý nápad skúsiť zopár jednoduchých prípadov, aby sme zistili, čo dostaneme, napr. ak je $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$ (netreba to však preháňať). Následne je vhodné zamyslieť sa nad tým, na aké skupiny sa

[1] Hráč má víťaznú stratégiu, ak si vie svojimi ťahmi zaručiť výhru bez ohľadu na to, ako hrá jeho súper.
[2] Hráč má víťaznú stratégiu, ak si vie svojimi ťahmi zaručiť výhru bez ohľadu na to, ako hrá jeho súper.

dajú prirodzené čísla rozdeliť, často sa totiž stáva, že vlastnosť, ktorú chceme ukázať majú len prvočísla, párne či nepárne čísla alebo také, ktoré dávajú zvyšok 4 po delení deviatimi, a podobne.

Väčšina z vás začala presne takto – vyskúšala, či je možné mať víťaznú stratégiu pre $n = 2, 3, 4, \ldots$ Ak to urobíme, zistíme, že pre párne n zvíťazí ten, čo je na ťahu, v tomto prípade Adam, zatiaľ čo v prípade, že n je nepárne, zvíťazí jeho súper, ak teda obaja rozmýšľajú racionálne. To ale nie je všetko, treba ukázať, prečo to tak je.

Prečo teda Adam vyhrá pri párnom n? Ak má Adam na stole párny počet mincí, dokáže z neho vždy spraviť nepárny (napr. odoberie jednu), ale aj párny (napr. odoberie dve), okrem prípadu, kedy tam sú dve mince, vtedy má len jednu možnosť – vezme jednu z nich a vyhral. Avšak, keď je na stole nepárny počet mincí, po ďalšom ťahu bude tento počet naisto párny. Prečo? Pretože nepárne číslo n nemôže mať párnych deliteľov. Ak by malo, muselo by obsahovať vo svojom prvočíselnom rozklade dvojku, a teda by muselo byť párne. A je ľahké ukázať, že rozdiel dvoch nepárnych čísel bude vždy párny. To je pre nás ale dosť zaujímavé, pretože ak po takomto ťahu vždy zostane párny počet mincí, tak ten, ktorý sa dostane na ťah, určite neprehrá – jedna minca na stole byť predsa nemôže. To znamená, že ak súperovi na stole vždy necháme nepárny počet mincí, zaručene neprehráme – teda vyhráme. No ale to vie hocikto ľahko zaručiť, keď má na stole párny počet mincí – stačí zobrať jednu. A to je víťazná stratégia :).

Ak by sme začali s nepárnym počtom mincí, Adam musí odobrať nepárny počet a pre Milana ich zostane párny počet, takže zvládne vyhrať pomocou vyššie popísanej stratégie.

Vďaka tomu, čo sme ukázali vyššie, už môžeme tvrdiť, že pre párne n zvíťazí ten, čo začína, v tomto prípade Adam, v opačnom prípade má víťaznú stratégiu Milan.

1.3 Konštrukcia Milá Srdcu

opravovali **Kika a Kika**

Zadanie. *Iveta má na papieri narysované dve polpriamky k, s vychádzajúce zo spoločného bodu. Mimo polpriamok k, s sa nachádza bod M. Iveta chce narysovať body K a S, ktoré ležia postupne na polpriamkach k a s. Navyše chce, aby platilo $|KM| = |MS|$ a aby body K, M, S ležali na jednej priamke. Ivetá má k dispozícii euklidovské pravítko a kružidlo.[3] Nájdite pre Ivetu všeobecný postup konštrukcie, ktorým narysuje spomenuté body K, S.*

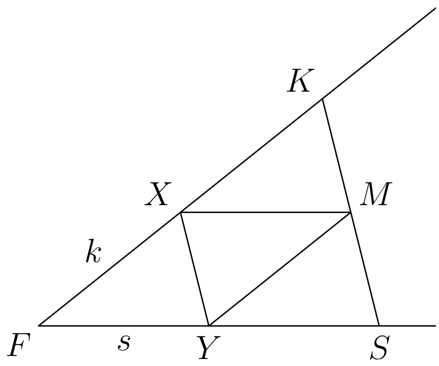
Najprv sa ospravedlníme, za nepresnosť zadania. Bod M mal byť bod vnútri menšieho z uhlov, ktoré zvierajú polpriamky k a s. Ak by tam nebol, tak veľmi jednoduchými úvahami by sme dospeli k tomu, že v tom prípade sa body K a S s požadovanou vlastnosťou nedajú nájsť.

Poďme sa pozrieť teraz na ten zaujímavý prípad. Označme si ešte prienik polpriamok k a s ako F. Chceme, aby body K, M a S, ležali na jednej priamke a aby $|KM| = |MS|$. Pozrime sa na trojuholník FKS. Bod M je stred úsečky KS. Toto je kľúčová informácia, skúsme sa nad ňou zamyslieť. Čo vieme o strede strany v trojuholníku? Poznáme nejaké úsečky, ktoré ním prechádzajú? Čo sú zač úsečky v tomto trojuholníku, ktoré sú jedna rovnobežná so stranou FK, druhá so stranou FS a taktiež prechádzajú cez bod M? Sú to stredné priečky trojuholníka FKS. Ich zostrojením nájdeme stredy strán FK a FS. Nazvime ich postupne X a Y. Potom už len zostrojíme kružnice x (so stredom v bode X a polomerom $|FX|$) a y (so stredom v bode Y a polomerom $|FY|$). Tam, kde majú tieto kružnice prienik s polpriamkami k a s (a nie je to bod F), sa nachádzajú body K a S.

Ako skonštruovať rovnobežku s polpriamkou k cez bod M? Spravíme najprv kružnicu so stredom v bode M, ktorá sa s polpriamkou k pretne v dvoch bodoch, ktoré označíme A a B. Tieto body sú od bodu M rovnako vzdialené, pretože sú na kružnici so stredom v bode M. Nájdeme ešte jeden bod, ktorý je od bodov A a B rovnako vzdialený. Stačí, keď spravíme kružnicu so stredom v bode A a kružnicu so stredom v bode B, obe

[3] O tom, čo je to euklidovské pravítko a kružidlo a čo všetko sa s nimi môže a nemôže robiť si prečítajte na stránke .

s rovnakým polomerom dostatočne veľkým na to, aby sa preťali. Body, v ktorých sa pretnú, sú, prirodzene, taktiež rovnako vzdialené od bodov A a B. Teraz stačí keď ich spojíme a máme kolmicu. Zopakovaním tohto postupu dostaneme hľadanú rovnobežku. Rovnobežku s polpriamkou s narysujeme podobne.



Iné riešenie

Vieme, že uhlopriečky rovnobežníka sa rozpoľujú. Skúsme teda nájsť body K a S tak, aby boli protiľahlé vrcholy tohto rovnobežníka. Keďže bod K má byť na polpriamke k a bod S na polpriamke s, tak čo keby tieto polpriamky aj určovali dve strany tohto rovnobežníka. Potom by bod F mohol byť ďalším vrcholom rovnobežníka. Nájdime aj posledný vrchol rovnobežníka. Stačí, keď spravíme polpriamku z bodu F, prechádzajúcu cez bod M. Následne nájdeme bod P na tejto polpriamke, ktorý je od bodu M rovnako vzdialený ako bod F. Potom už len zostrojíme rovnobežky s polpriamkami k a s, ktoré prechádzajú bodom P. Body K a S sú prienikom týchto rovnobežiek s polpriamkami k a s. Máme teda rovnobežník $KPSF$, v ktorom sa uhlopriečky pretínajú v bode M.

1.4 Kika, Múdry Sedliak

opravoval **Adam**

Zadanie. *Kika pestuje tekvicu na poli, ktoré má tvar konvexného mnohouholníka.*[4] *Každý múdry sedliak však vie, že tekvicové pole sa najlepšie obrába, keď má tvar rovnoramenného trojuholníka. Kika si ďalej všimla, že svoje pole môže rozdeliť pomocou niekoľkých uhlopriečok na rovnoramenné trojuholníky, čo aj urobila. Uhlopriečky, ktorými je pole rozdelené, sa nepretínajú vnútri mnohouholníka. Dokážte, že niektoré dve strany pôvodného mnohouholníka majú rovnakú dĺžku.*

Kikino pole sa celé skladá s rovnoramenných trojuholníkov, ktoré vždy susedia najviac dva naraz (nevieme nájsť trojicu trojuholníkov ktoré by spolu všetky susedili stranou, inak by boli vytvorené z uhlopriečok ktoré sa pretínajú). Viacerých z vás to viedlo k jednej z viacerých metód riešenia – buď ste jej pole postupne po jednom rozoberali, alebo skladali. Tento spôsob funguje tak, že si na začiatku všimneme nejakú vlastnosť, a potom sledujeme, či ostane zachovaná aj pri tom, keď postupne pridávame/odoberáme časti. Pozrime sa, ako sa takto dala vyriešiť táto úloha.

Vyskúšame na to ísť sporom, budeme sa snažiť spraviť mnohouholník, ktorý **ne**spĺňa podmienku zo zadania, a ak dokážeme, že sa takýto nedá skonštruovať, dokážeme zároveň, že podmienka platí pre všetky mnohouholníky. Kikino pole môžeme miesto sekania uhlopriečkami začať konštruovať. A to tak, že budeme zaradom k sebe lepiť rovnoramenné trojuholníky. Budeme si dávať pozor, aby bol výsledok vždy konvexný. Napríklad aj tak, že keď k sebe prilepíme dva trojuholníky, budú musieť mať rovnakú spoločnú stranu, cez ktorú budú zlepené.

[4] Konvexný mnohouholník je taký mnohouholník, v ktorom spojnica ľubovoľných dvoch bodov leží celá vnútri mnohouholníka.

Začneme teda s jedným trojuholníkom. Je rovnoramenný, môžme si teda povedať, že dve strany majú dĺžku a a jedna dĺžku b. Super, máme prvé mnohouholníkové pole, i keď mnoho je tu len tri. Takéto pole nevieme rozseknúť uhlopriečkou. Dve strany má rovnaké, spĺňa teda podmienku zo zadania.

Poďme však ďalej, ak chceme dostať štvoruholníkové pole, potrebujeme k prvému trojuholníku prilepiť druhý. Strana, ktorú budú mať spoločnú, bude uhlopriečka výsledného mnohouholníka. Ak nový trojuholník prilepíme k strane s dĺžkou b, vo výslednom mnohouholníku ostanú obe strany s dĺžkou a, čo by zase splnilo zadanie. Skúsime teda nový trojuholník prilepiť k jednej zo strán dĺžky a. Pre nový trojuholník stále platí, že je rovnoramenný. Jednu jeho stranu už poznáme, je dĺžky a, lebo sme ju prilepili o druhú tak dlhú stranu. Zvyšné dve strany nového trojuholníka budú buď rovnaké (napr. dĺžky c), alebo bude aspoň jedna z nich rovnaká ako tá, ktorú sme lepili, teda dĺžky a.

Výsledný mnohouholník teda bude mať isto jednu stranu a a jednu stranu b z pôvodného trojuholníka (jedna strana a je schovaná vnútri). Z nového trojuholníka bude mať buď dve strany c (čo rovno potvrdzuje podmienku a túto možnosť nechceme), alebo jednu stranu c a jednu a (tu to kazí zase strana a). Každopádne, v oboch prípadoch ostane platiť podmienka zo zadania, ktorú sa snažíme (neúspešne) porušiť.

Čo môžme spraviť je pridať ďalší trojuholník, čím nám mnoho v mnohouholníku stúpne na päť. Ak chceme zrušiť podmienku zo zadania, musíme ho prilepiť o jednu zo strán ktoré robili problémy (boli v mnohouholníku dva krát). Ako si už ale asi začínate všímať, nezbavíme sa jej úplne kompletne. Z nového trojuholníka budú vo výslednom mnohouholníku dve strany. Ak nemajú byť rovnaké, musí byť jedna z nich rovnaká ako strana, ktorú sme lepili, a teda rovnaká ako strana, ktorá nám minule robila problémy. Tým sa problémová strana zase dostane medzi strany mnohouholníka a zase bude robiť problémy.

Už sme tam, kde sme chceli byť. Nech budeme nové trojuholníky lepiť akokoľvek (a vytvárať tak čoraz viacuholníky), nikdy sa nezbavíme strany, ktorá je rovnaká ako iná strana v trojuholníku. Z toho teda vyplýva, že podmienka zo zadania bude platiť pre hocijaký mnohouholník zo zadania, ktorý vieme vytvoriť postupným skladaním. Keďže Kikino pole sa musí dať postupne poskladať, musí preň platiť aj podmienka ktorá platí pre všetky takéto mnohouholníky – teda že aspoň dve jeho strany budú rovnako dlhé.

1.5 Klenoty Moje Spoznaj

opravovali **Čeky a Marián**

Zadanie. *Čeky má* 11 *náramčekov, každý inej farby. Odkladá si ich do vreca, ktoré by sa roztrhlo, ak by v ňom bolo viac ako* 11 *kg. Ivka vie, že náramčeky majú v nejakom poradí hmotnosti* 1, 2, 3, ..., 11 *kg, ale nevie v akom. Čeky pozná hmotnosti všetkých náramčekov a chce dokázať Ivke, že ružový náramček váži* 1 *kg. V jednom kroku môže Čeky dať do vreca nejaké náramčeky a ukázať Ivke, že sa* ***neroztrhlo****. Koľko najmenej krokov potrebuje Čeky na to, aby Ivku presvedčila?*

V tejto úlohe máme nájsť najmenší počet krokov, na ktorý môže Čeky presvedčiť Ivku. Čo to znamená? Keď nájdeme, že Čeky stačí n krokov a myslíme si, že je to najmenej, musíme dokázať, že na menej krokov to nie je možné. Ak sa nám to nebude dariť, je možné, že naše riešenie nie je dostatočné a budeme musieť nájsť presvedčenie na menej krokov.

Jedným zo spôsobov, ako môže Čeky dokázať o náramčeku, že má váhu 1 kg, je pridať ho do vreca, o ktorého obsahu vie presvedčiť Ivku, že má Váhu 10 kg. (Vrece sa následne neroztrhne, takže pridaný náramček musí vážiť 1 kg.)

Najprv sa pozrieme, koľko najviac náramčekov môže Čeky do takých 11 kg zmestiť. Ak vždy vyberá najmenší náramček, tak po štyroch $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ tam už ďalší nedá (najmenší, ktorý jej ostal, má váhu 5 kg, a do vreca už vieme dať len 1 kg, aby sa neroztrhlo).

Vieme naplniť vrece štyrmi náramčekmi aj inak? Na to musíme aspoň jeden vymeniť. Jediné, čo sa nám do vreca ešte zmestí, je vymeniť niektorý náramček za ten s váhou 5 kg, a vymieňaný náramček musí byť ten s váhou 4 kg. Máme teda dva spôsoby ako zmestiť štyri náramčeky do vreca tak, aby sa neroztrhlo: 1, 2, 3, 4 kg a 1, 2, 3, 5 kg.

Keď teda Ivke ukážeme vrece so štyrmi náramčekmi, určite platí, že niektorý z nich je ten s váhou 1 kg. Ostáva nám ju presvedčiť o tom, ktorý z nich to je. Na to použijeme jednoduchý trik – ukážeme Ivke jeden zo štyroch náramčekov, ktoré boli vo vreci pri prvom pokuse, spolu s ďalšími dvomi, ktoré tam predtým neboli.

Ak sme prvýkrát vo vreci ukazovali 1, 2, 3, 4 kg, tak tie dva odlišné by museli vážiť aspoň 5 kg + 6 kg = 11 kg, ku ktorým sa jednotka už nezmestí. Ak sme ale začali so štvoricou 1, 2, 3, 5 kg, tak jediná (nepoužitá) dvojica náramkov, ku ktorej sa do vreca bez roztrhnutia zmestí ešte tretí, je 4 kg a 6 kg (všetky väčšie dvojice by vážili aspoň 11 kg).

Tým sme dostali naše riešenie na dva ťahy: Čeky najprv dá do vreca náramčeky s hmotnosťami 1, 2, 3, 5 kg a potom 1, 4, 6 kg, z čoho si Ivka musí byť istá, že náramok, ktorý bol v oboch týchto meraniach, musí vážiť 1 kg.

To je pre nás super výsledok, lebo dokázať, že Čeky na menej ťahov Ivku nepresvedčí, je jednoduché. Ak dá Čeky do vreca len jeden náramček, tak to nemusí byť ten jednokilový a ak ich tam dá viac, tak sú navzájom nerozlíšiteľné. Čeky preto potrebuje najmenej dva kroky.

1.6 Králik Maľuje Stenu

opravovali **Marek a Zajo**

Zadanie. *Zajo si vymaľoval steny a teraz hľadá čísla x, y, ktoré by si na ňu zavesil. Má však na ne veľké nároky. Musia vyhovovať rovniciam*

$$x^3 - 5 \cdot \frac{y^2}{x} = \frac{6}{y}, \qquad y^3 - 5 \cdot \frac{x^2}{y} = \frac{6}{x}.$$

Nájdite všetky reálne čísla x, y, ktoré vyhovujú Zajovým nárokom.

Pri riešení sústavy rovníc sú najužitočnejšie triky jej úprava, prípadne operácie ako sčítanie a odčítanie dvoch rovníc. Z úprav typicky dostávame rovnosť súčinov niekoľkých členov, z ktorých by sa aj niečo dalo vykrátiť, ale treba ošetriť prípady, kedy sa to rovná nule. Presne takýmto spôsobom budeme postupovať aj my. Spravíme pár úprav, niečo vydelíme, čím si bokom dáme nejaké špeciálne prípady a takto budeme pokračovať až kým nerozoberieme celú rovnicu.

Zlomky nám tentokrát nepomôžu, upravme preto rovnice na tvar:

$$yx^4 - 5y^3 = 6x,$$

$$y^4x - 5x^3 = 6y.$$

Rovnice teraz sčítame a výslednú rovnicu upravujeme:

$$yx^4 + y^4x - 5y^3 - 5x^3 = 6x + 6y,$$

$$xy(x^3 + y^3) - 5(x^3 + y^3) = 6(x + y),$$

$$(xy - 5)(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 6(x + y).$$

V prípade, že $x = -y$, tak zátvorkou $(x + y)$ deliť nemôžeme, tento prípad ale ošetríme na konci, zatiaľ si preto rovnicu spokojne vydeľme:

$$(xy - 5)(x^2 - xy + y^2) = 6.$$

Naopak, ak obe rovnice odčítame dostaneme:

$$yx^4 - y^4x - 5y^3 + 5x^3 = 6x - 6y,$$

$$xy(x^3 - y^3) + 5(x^3 - y^3) = 6(x - y),$$

$$(xy + 5)(x - y)(x^2 - xy + y^2) = 6(x - y).$$

Tentokrát si odložíme prípad $x = y$ a rovnicu vydelíme:

$$(xy + 5)(x^2 - xy + y^2) = 6.$$

Porovnajme teraz ľavé strany nových rovníc, keďže pravé sa rovnajú:

$$(xy + 5)(x^2 - xy + y^2) = (xy - 5)(x^2 - xy + y^2).$$

Na oboch stranách sa nachádza výraz $(x^2 - xy + y^2)$. Môže tento výraz byť nulový? Ak áno, kedy?

Odpoveďou je, že nulový nebude, uveďme si dva spôsoby, ako to dokázať:

- Priamočiaro ho vieme upraviť na tvar

  $$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

  Oba členy sú zjavne nezáporné (štvorce), preto ak by sa celý výraz mal rovnať 0, tak sa obe zátvorky musia rovnať 0, čo spĺňa len prípad $x = y = 0$.
- Prvý spôsob celkom pôsobí, že padol z neba, a ak nás toto nenapadlo, mohli sme postupovať nasledovne: Ak $x^2 - xy + y^2 = 0$, tak $x^2 + y^2 = xy$, z čoho vyplýva, že xy je tiež nezáporné (ľavá strana je nezáporná, tak musí byť aj pravá). Potom už len výraz doplníme na štvorec: $x^2 - 2xy + y^2 + xy = (x - y)^2 + xy = 0$. Opäť dostávame súčet dvoch členov, ktoré musia byť oba nulové aby platila rovnosť, čo nastáva rovnako v prípade $x = y = 0$.

Z posledných dvoch paragrafov vyplýva, že môžeme zátvorkou $x^2 - xy + y^2$ beztrestne deliť, keďže daný prípad $x = y$ ošetríme na konci. Ostane nám rovnica:

$$xy + 5 = xy - 5 \quad \rightarrow \quad 5 = -5.$$

Preto táto vetva nemá riešenie a všetky riešenia rovníc budú tie, kedy zátvorky ktorými sme delili budú nulové.

Na záver nám ostáva preto vyšetriť dva prípady: $x = y$ a $x = -y$. Ak $x = y$, obe rovnice zo zadania majú tvar po odstránení zlomkov:

$$x^4 - 5x^2 - 6 = 0.$$

Takúto rovnicu vieme upraviť na tvar:

$$(x^2 - 6)(x^2 + 1) = 0.$$

Z neho dostávame riešenie $x = y = \pm\sqrt{6}$ (keď je prvá zátvorka nulová, druhá totiž nulová nikdy nebude). Ak máte pocit, že úprava opäť padla z neba, takéto rovnice sa dajú počítať aj tak, že si zavedieme substitúciu $a = x^2$ a potom vyriešime kvadratickú rovnicu v a (napr. výpočtom diskriminantu) a potom spätne vyjadríme x.

Veľmi podobne prípad $x = -y$:

$$x^4 - 5x^2 + 6 = 0,$$

$$(x^2 - 3)(x^2 - 2) = 0,$$

kedy x môže byť $\pm\sqrt{3}$ a $\pm\sqrt{2}$.

Ak to celé dáme dokopy, dostávame šesť riešení:

$$(x, y) \in \{(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{3}, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, \sqrt{3}), (\sqrt{6}, \sqrt{6}), (-\sqrt{6}, -\sqrt{6})\}.$$

1.7 K-násobný Matematik Slavo

opravovali **Maťo a Slavo**

Zadanie. *Slavo rád počíta deliteľov. Preto si zobral nepárne prvočíslo p. Potom pre každé celé číslo k spĺňajúce $1 \le k \le p-1$ spočítal počet deliteľov čísla $kp+1$, ktoré sú väčšie ako k a menšie ako p, a výsledný počet si zapísal na papier. Určte súčet všetkých čísel, čo Slavo napísal na papier.*

V prvom rade je dôležité uvedomiť si, čo chceme spočítať. Máme prvočíslo p, zoberieme si všetky čísla k menšie ako p, spočítame počty deliteľov (označíme si ich ako vyhovujúce alebo d) čísel $kp+1$, ktoré sú medzi k a p (teda $k < d < p$). - Pre výraz $1p+1$ chceme zistiť, koľkými z deliteľov $2, 3, 4, \ldots, p-1$ je deliteľný. - Pre výraz $2p+1$ chceme zistiť, koľkými z deliteľov $3, 4, 5, \ldots, p-1$ je deliteľný. - Pre výraz $3p+1$ chceme zistiť, koľkými z deliteľov $4, 5, 6, \ldots, p-1$ je deliteľný. … - Pre výraz $(p-2)p+1$ chceme zistiť, koľkými z deliteľov $p-1$ je deliteľný,

Zapíšme si to do tabuľky (delitele a výrazy, ktoré nás zaujímajú):

k\deliteľ	2	3	4	5	6	…
1	p+1	p+1	p+1	p+1	p+1	
2		2p+1	2p+1	2p+1	2p+1	
3			3p+1	3p+1	3p+1	
4				4p+1	4p+1	
5					5p+1	
…						

Ak sa na to pozrieme z iného uhla (po stĺpcoch), stačí spočítať, či výraz $p+1$ je deliteľný 2-mi, koľko z výrazov $\{p+1, 2p+1\}$ je deliteľných 3-mi, koľko z výrazov $\{p+1, 2p+1, 3p+1\}$ je deliteľných 4-mi, … , koľko z $\{p+1, 2p+1, \ldots, (p-2)p+1\}$ delí $p-1$.

Chceme teda zistiť, koľkokrát x delí výrazy $\{p+1, 2p+1, \ldots, (x-1)p+1\}$ (pre $x = 2, 3, 4, \ldots, p-1$). Ak si to vyskúšame pre nejaké konkrétne x a p, zistíme, že x delí práve jeden z daných výrazov. Ako to dokázať? Skúsme sa pozrieť na zvyšky výrazov po delení x. Zaujíma nás zvyšok 0. Môžeme si všimnúť, že zvyšky výrazov $p+1$, $2p+1$, …, $(x-1)p+1$ sú všetky rôzne. Ak sa nám to podarí dokázať, tak budeme mať $x-1$ rôznych zvyškov z x možných. Potom stačiť ukázať, že ten jeden zvyšok, čo tam chýba nie je 0. To ale platí, lebo chýba zvyšok $0p+1 = 1$ (čo zrejme nie je deliteľné žiadnym deliteľom).

Nech majú výrazy $ap+1$ a $bp+1$ $(0 < a,\ b < x)$ rovnaký zvyšok po delení x. Potom x delí $(ap+1)-(bp+1) = p(a-b)$. Keďže p je prvočíslo väčšie ako x, tak x musí deliť $a-b$, teda a aj b majú rovnaký zvyšok po delení x. Preto čísla a aj b musia byť rovnaké.

Ľubovoľný deliteľ x $(1 < x < p)$ delí práve jeden výraz $kp+1$, preto bude zarátaný práve raz. Súčet čísel na papieri bude preto $p-2$.

1.8 Kružnice Marián Sleduje

opravoval **Vodka**

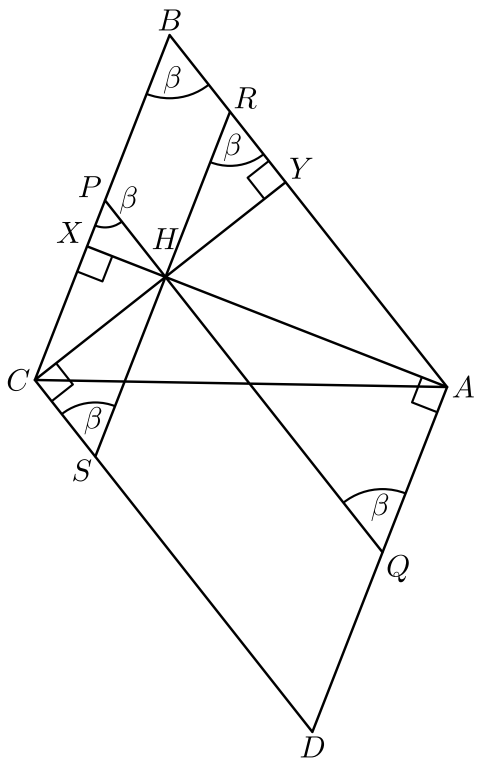
Zadanie. *Marián sa rozhodol, že sa začne venovať geometrii. Čarodejník Š mu poradil, že podstatou každej geometrickej úlohy je nájsť 4 body, čo ležia na jednej kružnici. Skúste to s ním aj vy!*

Majme rovnobežník ABCD. Nech H je priesečník výšok trojuholníka ABC. Rovnobežka so stranou AB cez bod H pretína priamky AD a BC postupne v bodoch Q a P. Rovnobežka so stranou BC cez bod H pretína priamky AB a CD postupne v bodoch R a S. Dokážte, že body P, Q, R, S ležia na jednej kružnici.

To, že body P, Q, R, S ležia na jednej kružnici dokážeme pomocou mocnosti bodu H[5]. Potrebujeme dokázať vzťah $|PH| \cdot |QH| = |RH| \cdot |SH|$. Poďme na to.

Označme si postupne päty výšok v trojuholníku ABC z bodov A, C ako X, Y. Vieme, že body A, C, X, Y ležia na jednej kružnici – na Talesovej kružnici nad priemerom AC. Z mocnosti bodu H k tejto kružnici dostávame, že platí $|AH| \cdot |XH| = |CH| \cdot |YH|$. Potrebujeme teraz len nejakým spôsobom prejsť od tejto rovnosti k dokazovanej rovnosti.

To spravíme jednoducho. Všimnime si trojuholníky PXH, QAH, RYH, SCH. Všetky sú pravouhlé, vďaka tomu, že $ABCD$ je rovnobežník a AX a CY sú výšky v trojuholníku ABC. Navyše vďaka rovnobežnostiam $AB \parallel PQ \parallel CD$ a $BC \parallel RS \parallel AD$ platí, že uhol pri vrcholoch P, Q, R, S v týchto trojuholníkoch je vždy uhol, ktorý zvierajú priamky AB a AC. Preto sú všetky tieto trojuholníky podobné.



Z podobnosti týchto štyroch trojuholníkov máme, že platí:

$$\frac{|PH|}{|XH|} = \frac{|QH|}{|AH|} = \frac{|RH|}{|YH|} = \frac{|SH|}{|CH|}.$$

Z tohto a rovnosti $|AH| \cdot |XH| = |CH| \cdot |YH|$ zrejme vyplýva dokazovaná rovnosť $|PH| \cdot |QH| = |RH| \cdot |SH|$. Preto body P, Q, R, S ležia na jednej kružnici.

Na záver geometrickej úlohy sa hodí urobiť diskusiu o možnej polohe bodov. Riešenie je písané tým štýlom, že ak trojuholníky PXH, QAH, RYH, SCH existujú, tak sa nemá čo pokaziť. Je jedno, či je ABC tupouhlý a či H leží vnútri alebo nie, všetky argumenty platia rovnako. Jediný problém môže nastať ak spomínané

[5] Pokiaľ si sa s mocnosťou bodu ku kružnici, ešte nestretol, môžeš si o nej prečítať v Zbierke KMS od strany 37.

trojuholníky neexistujú, a to nastane keď niektoré body splynú do jedného. To sa stane, ak je trojuholník ABC pravouhlý. Nech je však pravouhlý pri hociktorom vrchole, tak si ľahko rozmyslíme, že v tom prípade dva z bodov P, Q, R, S splynú do jedného a dokázať, že 3 body ležia na jednej kružnici je už triviálne, lebo neležia na jednej priamke. Tým sme prebrali naozaj všetko a úloha je dokázaná.

1.9 Krásy Malebného Slovenska

opravoval **Pedro**

Zadanie. *Jožo cestoval autobusom obdivujúc krásy malebnom Slovensku. Prišlo mu však nevoľno kvôli nerovnostiam na slovenských cestách. Úplne ho dorazila nasledovná nerovnosť.*

$$2 < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} < \sqrt{6}.$$

Najprv spravme zopár dôležitých pozorovaní, ktoré budeme môcť využiť a vďaka ktorým nebudeme musieť skúšať blbosti.

- Nerovnosti sú homogénne – t.j. môžeme všetky premenné predeliť alebo vynásobiť ľubovoľným kladným číslom (pre všetky tri rovnakým) a nezmení to hodnotu výrazu. Tento poznatok je dôležitý vďaka tomu, že nám to umožňuje spraviť predpoklad $a + b + c = 1$ alebo $abc = 1$.
- Nerovnosti sú symetrické. To znamená, že pre ľubovoľnú trojicu a, b, c nadobúda výraz v strede rovnakú hodnotu pre všetky jej permutácie. Vďaka tomu môžeme urobiť predpoklad $a \geq b \geq c$.
- Po vyskúšaní pár hodnôt (trebárs keď s c ideme k nule a a a b sa nám v dôsledku trojuholníkovej nerovnosti takmer rovnajú) zisťujeme, že ľavá nerovnosť je našim výrazom „limitne“ (t.j. ľubovoľne tesne) dosiahnuteľná. Naopak, o pravej nerovnosti sa to povedať nedá – po vyskúšaní mnohých dosadení a, b, c sú hodnoty výrazu od $\sqrt{6}$ nezanedbateľne ďaleko. Čo z toho vyplýva? Že pri tej ľavej strane musíme byť opatrnejší pri odhadoch – čím bližšie je hodnota nášho výrazu k 2, tým tesnejší náš odhad musí byť. Naopak, pri pravej nerovnosti si môžeme dovoliť aj odhady, ktoré nezanedbateľne zväčšujú hodnotu výrazu pre ľubovoľné dosadenie – ak nebudú príliš hrubé, máme stále záruku ostrej nerovnosti.
- Zároveň sa dá všimnúť, že tá ľavá nerovnosť platí bez ohľadu na to, či máme strany trojuholníka alebo nie, zatiaľ čo tá pravá je od tohto predpokladu závislá – voľbou obrovského a a malých b, c by náš výraz $\sqrt{a/(b+c)}$ presiahol ľubovoľnú konštantu. Z toho vyplýva, že pri dokazovaní pravej nerovnosti tento predpoklad určite využijeme (avšak pomôcť nám, samozrejme, môže aj pri dokazovaní ľavej, keďže ju musíme dokázať pre výrazne menšie množstvo hodnôt a, b, c).

Dosť bolo filozofovania, pozrime sa na pravú nerovnosť. Chceme teda dokázať, že pre všetky a, b, c, ktoré tvoria strany trojuholníka platí:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} < \sqrt{6}.$$

Predpokladajme, že $a \geq b \geq c$. Vidíme tu súčet troch odmocnín na strane menšieho výrazu a aj na pravej strane vidíme odmocninu. Čo nám napadne? No predsa Cauchyho-Schwarzova nerovnosť v odmocninovom tvare[6]. Pripomeňme si ju:

$$\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \cdots + \sqrt{a_n b_n} < \sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)}$$

[6] Bližsie si o nej môžete preítať na https://mks.mff.cuni.cz/library/CauchySchwarzAS/CauchySchwarzAS.pdf.

Toto platí pre všetky a, b, c nezáporné. To, že je to dôsledkom klasického tvaru Cauchyho-Schwarzovej (CS) nerovnosti, si môžete dokázať.

Jej priamym využitím by úloha vyriešiť išla, ukážeme si však riešenie, vďaka ktorému po použití CS nerovnosti nebudeme musieť robiť žiadne ďalšie odhady či úpravy. Potrebujeme nejako zjednodušiť výraz na ľavej strane. Všimnime si, že za b-čka v našej CS nerovnosti budeme musieť zvoliť zlomky. Pri zlomkoch s rôznymi menovateľmi by nám v čitateľoch vznikali veci, ktoré by sa nedali dobre „škrtať", resp. celkovo by sa nám s nimi zle pracovalo, lebo by to boli rôzne zmiešaniny písmen druhého stupňa. To nás môže naviesť na myšlienku, že chceme ešte pred použitím CS nerovnosti poodhadovať náš výraz tak, aby sme mali rovnaké menovatele. Po tejto myšlienke už nemáme veľa roboty – potrebujeme menovatele zmenšiť (aby sme zväčšili náš výraz, čo je pri tejto nerovnosti smer odhadovania). Teda takmer jediná rozumná myšlienka je nahradiť a v menovateľoch $\sqrt{b/(a+c)}$ a $\sqrt{c/(a+b)}$ b-čkom a c-čkom (v danom poradí). Dostávame takýto výraz:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{b+c}}.$$

Nie je ťažké uhádnuť, že to a v prvom sčítanci bude teraz problematické, keďže je momentálne vo výraze samo. Ako sa ho zbaviť? Tentoraz je v čitateli, teda ho potrebujeme nahradiť väčším výrazom. Tu sa priam na zlatom podnose núka možnosť využiť trojuholníkovú nerovnosť $a < b + c$. Nielenže sa zbavíme a-čka, navyše aj konečne spravíme ostrý odhad, ktorý k našej nerovnosti potrebujeme. Keď to spravíme, dostávame

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} \leq \sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{b+c}} < \sqrt{\frac{b+c}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{b+c}}.$$

To už je podstatne krajšie, a v tomto momente vám odporúčam prestať čítať túto polovicu vzoráku a skúsiť úlohu dopočítať.

Pre tých lenivších to spravím ja. Na tento výraz už stačí iba priamo aplikovať CS nerovnosť v odmocninovom tvare. Voľbou a-čiek čitateľov a b-čiek menovateľov (áno, dochádza tu k písmenkovej duplicite) dostávame:

$$\sqrt{\frac{b+c}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{b+c}} \leq \sqrt{(b+c+b+c)(\frac{3}{b+c})} = \sqrt{6},$$

čo je presne to, čo sme chceli dokázať.

Pozrime sa teraz na druhú našu nerovnosť. Chceme ukázať:

$$2 < \sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}.$$

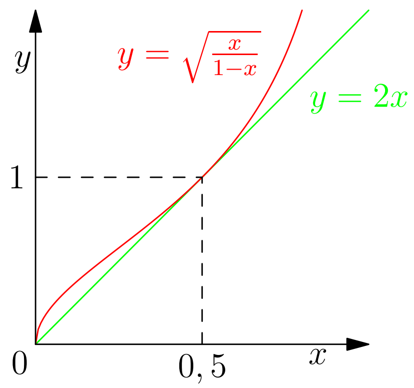
Spravme pre zmenu predpoklad $a + b + c = 1$. Na zjavné zjednodušenie výrazu by nám teraz pomohlo, keby sme súčty v menovateľoch postupne nahradili výrazmi $1 - a$, $1 - b$, $1 - c$. Vidíme tu tri rovnaké funkcie s inými argumentami. Pri takomto čomsi by nám mohla napadnúť Jensenová nerovnosť. Žiaľ, skúsil som a nič dobré mi nevyšlo.

Okrem toho by sme sa ale mohli pokúsiť odhadnúť tieto výrazy samostatne. Nahradiť ich nejakou vhodnou, menšou funkciou. Čo od takejto funkcie očakávame? V provom rade, všetky tri písmenká teraz patria do intervalu $(0; 0,5)$, pretože ich súčet je 1 a zároveň stále platí trojuholníková nerovnosť (tak predsa sme ju využili, hoci po dočítaní sa môžete zamyslieť, že sme ju v skutočnosti využiť nemuseli), teda žiadne číslo nemôže byť väčšie rovné $0,5$. Zároveň, pri hodnotách blízkych nule by mala mať naša funkcia tiež hodnoty blízke nule, pretože iba tak môže byť menšia rovná ako naša $\sqrt{a/(1-a)}$. Takisto pri hodnotách blízkych $0,5$ by naša funkcia mala mať hodnoty blízke 1, pretože náš výraz je v $0,5$ rovný jednej a už sme si povedali, že pri týchto hodnotách dosahuje náš celkový výraz hodnoty nebezpečne blízke 2, teda náš odhad musí byť pri týchto hodnotách veľmi tesný.

Vhodnou funkciou spĺňajúcou tieto nesmierne náročné požiadavky sa ukazuje byť funkcia $f(a) = 2a$. Tá je v nule rovná nule a v polovici je rovná jednej, navyše pre všetky a patriace do intervalu $(0; 0,5)$ platí: $\sqrt{a/(1-a)} > 2a$. Toto tvrdenie si môžeme potvrdiť (v zmysle vnútorne sa o ňom presvedčiť) obrázkom. Dokázať ho môžeme veľmi jednoduchými úpravami (skúste si, je to naozaj prístupné). Po urobení tohto odhadu pre všetky tri sčítance nášho výrazu dostávame

$$\sqrt{\frac{a}{1-a}} + \sqrt{\frac{b}{1-b}} + \sqrt{\frac{c}{1-c}} > 2a + 2b + 2c = 2$$

vďaka nášmu predpokladu $a + b + c = 1$.



Komentár k riešeniam

Musím vás pochváliť sa neuveriteľnú vynaliezavosť. Až pri čítaní vašich riešení som zistil, že mnohé cesty, ktoré som považoval za slepé, naozaj viedli k cieľu. Zároveň chcem pochváliť vaše vedomosti nerovností, keďže niektorí z vás využívali ozaj exotické alebo vysokoškolské nerovnosti.

1.10 Kybernetická Mirova Skúška

opravoval **Jožo**

Zadanie. *Mr. Miro sa nenaučil na test, tak sa musí spoľahnúť na svoje hekerské schopnosti. Okrem Mr. Mira sa testu účastní $n > 1$ študentov. Skúšajúci postupne zadáva otázky testu. Každú otázku najprv prečíta a dá na výber dve možnosti, z ktorých je práve jedna správna. Skôr, ako Mr. Miro napíše svoju odpoveď, je schopný pri každej otázke zistiť všetky odpovede ostatných študentov. Potom, čo všetci študenti (vrátane Mr. Mira) napíšu svoju odpoveď, skúšajúci ohlási správnu odpoveď a pokračuje ďalšou otázkou. Správna odpoveď je hodnotená 0 bodmi a nesprávna -2 bodmi, avšak nesprávna odpoveď Mr. Mira je hodnotená len -1 bodom, lebo Mr. Miro hekol hodnotiaci systém. Taktiež si Mr. Miro pri hekovaní nastavil 2^{n-1} bodov, pričom ostatní študenti začínali s 0 bodmi. Dokážte, že Mr. Miro môže zahlásiť: „Easy!“ a isto vie v teste skončiť najlepšie spomedzi všetkých študentov bez ohľadu na to, koľko otázok má test.*

Na začiatok spravíme niekoľko úvah, ktorými si úlohu trochu spríjemníme, aby sa nám s ňou ľahšie pracovalo. Bodovanie v teste je trochu divné, preto ho pozmeňme. Za správnu odpoveď bude 1 bod, za nesprávnu -1 bod pre študentov a 0 bodov pre Mr. Mira. Môžeme si to predstaviť tak, že skúšajúci dá po každej otázke každému skúšanému (aj Mr. Mirovi) po jednom bode. Takáto úprava nezmení poradie študentov, ktoré nás zaujíma, preto ju môžeme urobiť. Taktiež vieme povedať, že ak všetci študenti odpovedia rovnako, Mr. Miro dá rovnakú odpoveď ako oni. Takéto otázky poradie vôbec neovplyvnia, takže ich nemusíme uvažovať. Musíme taktiež zobrať do úvahy, že Mr. Miro môže mať jednoducho smolu – môže sa stále mýliť. Tak si rovno pridajme do našich predpokladov, že Mr. Miro odpovedá na každú otázku nesprávne.

Premyslite si, že ak Mr. Miro skončí najlepšie za takýchto podmienok, skončí najlepšie aj za podmienok a bodovania, ktoré sú v zadaní úlohy. Dospeli sme tak k nasledovnej interpretácii úlohy. Pri každej otázke sa študenti svojimi odpoveďami rozdelia na dve neprázdne množiny a Mr. Miro vyberie, ktorá množina študentov stratí bod a ktorá množina získa bod. Peknú moc sme našimi úvahami dostali, však? Úloha už znie viac uchopiteľnejšie. Poďme teraz opísať, ako bude Mr. Miro odpovedať.

Mr. Miro si rozdelí študentov podľa ich odpovedí na dve množiny. Pokiaľ sa takéto rozdelenie vyskytlo prvýkrát, pridá bod ľubovoľnej množine. Ak sa už takéto rozdelenie vyskytlo, pričom naposledy pridal bod množine A, teraz množine A bod strhne.

V otázkach s rovnakým rozdelením študentov dostáva každý študent striedavo $+1$ a -1 bod. Preto jeden študent môže získať najviac 1 bod pre jedno rozdelenie. Všetkých rozdelení n študentov na dve neprázdne množiny je $2^{n-1} - 1$ (premyslite si to). Preto môže jeden študent dosiahnuť najviac $2^{n-1} - 1$ bodov v celom teste, čo je ostro menej ako body Mr. Mira. Týmto spôsobom teda Mr. Miro skončí v teste najlepšie.

Komentár

Pri tejto úlohe bolo ťažké prísť na hlavnú myšlienku, ako Mr. Miro bude odpovedať. Na to bolo potrebné identifikovať, čo znamená číslo 2^{n-1} v zadní úlohy, a uvedomiť si, že súvisí s počtom rozdelení n študentov na dve množiny. Po tomto geniálnom nápade sa úloha môže zdať aj jednoduchá. Jadro riešenia sa dalo pekne stručne spísať, ako to možno vidieť v posledných dvoch odsekoch vzoráku.