Korešpondenčný matematický seminár
XXXIX. ročník, 2017/2018
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 2. kola zimnej časti

2.1 Kreatívne Mirove Schopnosti ($\kappa \leq 1$)

opravovali **Adam** a **Veronika**

Zadanie. *Mr. Miro je slávny svojou dokonalou dedukciou. Jeden známy mu raz rozprával o rovnobežníku, ktorý bol rozdelený priamkou na dva štvoruholníky. Sotva prezradil, že tieto dva štvoruholníky majú rovnaký obsah, Mr. Miro hneď hovoriac „Easy!" doplnil, že v takom prípade musia isto mať aj rovnaký obvod. Dokáže, že Mr. Miro mal pravdu.*

Ako sa píše v zadaní, Mr. Miro je slávny svojou dokonalou dedukciou, v tomto prípade to však, ako si ukážeme, nemal až také ťažké. Začať mohol napríklad tým, že sa zamyslel ako vlastne tá priamka náš rovnobežník pretína. Keď priamka pretneme dve susedné strany (niekde na strane, nie vo vrchole), dostaneme trojuholník a päťuholník. Keď podobným štýlom pretneme dve protiľahlé strany, dostaneme dva štvoruholníky (presne to potrebujeme). Ľahko odskúšame, aké všetky rôzne dvojice n-uholníkov vieme pretínaním dostať, no zistíme že spôsob, ako dostať dva štvoruholníky, je jediný.

Super, naša deliaca priamka teda pretne dve protiľahlé strany. Keďže robíme s rovnobežníkom, vieme že tieto strany budú rovnobežné. Výsledné dva štvoruholníky teda nebudú len tak hocijaké, budú to lichobežníky. Vzorec na výpočet obsahu lichobežníka je $S = \frac{1}{2}v(a + c)$. Čo tieto písmenká znamenajú? Písmenká a a c sú dĺžky dvoch rovnobežných strán lichobežníka. Výška lichobežníka je v, teda vzdialenosť dvoch rovnobežných strán. Tento vzorec si viete sami jednoducho odvodiť, kľudne si to vyskúšajte. Zo vzorčeka vidíme, že pri počítaní obsahu nás vlastne trápi iba súčet rovnobežných strán a ich vzdialenosť. Nič iné, čo by sa mohlo meniť, totiž výsledok neovplyvňuje.

Povedzme si, že náš pôvodný rovnobežník mal vrcholy A, B, C, D a že priamka p, ktorou ho delíme, pretína strany AB a CD postupne v bodoch X a Y. Oba lichobežníky, ktoré dostaneme, tak budú mať časť strany AB aj časť strany CD, spoločnú stranu XY plus jednu celú pôvodnú stranu rovnobežníka (AC alebo BD). Kľudne si to nakreslite. Oba lichobežníky budú mať rovnako dlhú výšku (vzdialenosť AB a CD).

Teraz sa môžme vrátiť k vzorcu obsahu lichobežníka. Obsahy oboch lichobežníkov majú byť rovnaké, dáme si teda dva vzorce do rovnosti. Aby sa nám to neplietlo, označíme si dve časti strany AB ako a_1, a_2 a dve časti strany CD ako c_1, c_2. Pritom strany a_1 a c_1 budú v rovnakom štvrouholníku.

$$\frac{1}{2}v(a_1 + c_1) = \frac{1}{2}v(a_2 + c_2)$$

Keďže v oboch lichobežníkoch je výška rovnaká, môžeme ňou predeliť obe strany rovnice (a keď už sme pri tom, predelíme ich aj tou jednou polovicou, nech nám nezavadzia).

$$a_1 + c_1 = a_2 + c_2$$

Zostane nám na oboch stranách len súčet dvoch rovnobežných strán, ktorý je rovnaký. To znamená, že súčet dĺžok časti strany AB a časti strany CD v oboch štvoruholníkoch bude rovnaký. Rovnaká bude aj dĺžka ich spoločnej strany XY. Zostáva sa nám už len pozrieť na poslednú stranu, konkrétne AD v prvom lichobežníku a BC v druhom lichobežníku. Tie sú však protiľahlé strany rovnobežníka, s rovnakou dĺžkou. Ta-dá – ukázali sme, že obvody o_1 a o_2 oboch štvoruholníkov budú rovnaké a ani sme sa pri tom nezapotili.

$$o_1 = |AD| + |XY| + a_1 + c_1 = |BC| + |XY| + a_2 + c_2 = o_2$$

2.2 Kruhové Mestské Spoje ($\kappa \leq 2$)

opravovali **Betka** a **Rado P.**

Zadanie. *O sláve Mr. Mira sa dopočuli aj vo Farebnom meste. Zavolali ho, aby im pomohol navrhnúť linky MHD. Vo Farebnom meste majú každú ulicu vymaľovanú jednou z troch farieb: červenou, zelenou alebo modrou. Každá ulica je obojsmerná a spája práve dve križovatky. Z každej križovatky vychádzajú práve tri ulice, z každej farby jedna.*

Každá linka MHD má cyklickú trasu. Nemá teda východziu a konečnú zastávku, ale chodí dokola po svojej trase. Pri jednom opakovaní trasy nesmie dvakrát prejsť tou istou ulicou. Dokážte, že je možné v meste zaviesť linky MHD tak, že každou ulicou budú premávať práve dve linky MHD.

Čo to vlastne máme dokázať. Pre lepšiu predstavu si môžeme skúsiť nakresliť zopár príkladov, ako môže vyzerať Farebné mesto a skúsiť v nich nájsť linky MHD. Avšak našou úlohou nie je vyriešiť úlohu na jednom alebo zopár viac konkrétnych mestách. Potrebujeme ukázať, že linky MHD môžeme zaviesť v ľubovoľnom meste, ktoré spĺňa podmienky opísané v zadaní. Konkrétne príklady miest nám môžu pomôcť tak, že na nich môžeme odpozorovať princípy, ktoré budeme vedieť použiť aj vo všeobecnosti.

V zadaní sa píše, že ulice farebného mesta sú zafarbené tromi farbami. Bolo by dobré túto informáciu nejako využiť a skúsiť opísať linky MHD pomocou týchto farieb. Pozrime sa na jednu križovatku. Niektorá linka do nej musí prichádzať (môže aj odchádzať, ale to nevadí, pôjdeme po nej len v opačnom smere) po červenej ulici. Z danej križovatky potom musí pokračovať ulicou inej farby, povedzme zelenou. Pokračujme ďalej po tejto linke do križovatky, kam prichádza po zelenej ulici. Ako bude pokračovať ďalej? Keďže z každej križovatky vychádza z každej farby jedna ulica, tak nám stačí určiť farbu ulice, ktorou má naša sledovaná linka pokračovať. Bolo by dobré, ak by linky striedali farby ulíc podľa nejakého pekného systému. Čo za systém využívajúci farby môžeme vymyslieť. Napr. linky môžu striedať všetky farby v poradí červená, zelená, modrá; môžu striedať len niektoré dve farby alebo aj rôzne komplikovanejšie postupnosti farieb. Môžete sa zamyslieť, v ktorých prípadoch, aké linky dostaneme. Budú kruhové, budú každou ulicou chodiť dve?

Ako dobrým systémom sa ukáže striedanie dvoch farieb. Pozrime sa teda, čo za linky budú také, ktoré budú chodiť striedavo po dvoch farbách, začnime červenou a zelenou farbou.

Vyberme si niektorú križovatku, označme si ju T, a vyberme sa z nej po červenej ulici. Budeme ďalej pokračovať zelenou ulicou, červenou, zelenou a tak ďalej. Keďže z každej križovatky vychádza ulica každej farby, vždy budeme mať kam pokračovať. Keďže mesto má obmedzený počet križovatiek, po nejakom čase sa musíme dostať do križovatky, v ktorej sme už boli. Aby táto červeno-zelená linka bola cyklická, mala by to byť križovatka T, v ktorej sme začali.

Čo ak by sme takto prišli do inej križovatky X? Keď sme prešli prvýkrát križovatkou X, prešli sme tak červenou a zelenou ulicou (v nejakom poradí), ktoré vychádzajú z križovatky X. Keď sme sa do križovatky X vrátili po druhýkrát, prišli sme do nej po ešte nepoužitej ulici. Tá má zelenú alebo červenú farbu. Takto dostávame, že z križovatky X vychádzajú dve zelené alebo dve červené ulice. Preto sa nám nemôže stať, že sa vrátili do križovatky X. Jediná križovatka, v ktorej sa môžeme napojiť na našu prejdenú trasu, je teda križovatka T, z ktorej sme začali.

Takto sme ukázali, že ak z jednej križovatky budeme striedať červené a zelené ulice, budeme chodiť do kola tými istými ulicami. Preto môžeme zaviesť cyklickú linku, ktorá bude chodiť týmito ulicami. Samozrejme, mohli ostať červené a zelené, ktorými táto linka neprešla. V takom prípade tento náš postup zopakujeme a dostaneme tak niekoľko cyklických liniek, ktoré budú striedať červené a zelené ulice. Linky takéhoto typu budeme volať *červeno-zelené*.

Podobným spôsobom zavedieme aj *zeleno-modré* a *modro-červené* linky. Tie budú z rovnakého dôvodu tiež cyklické. Vo Farebnom meste teda zavedieme linky troch typov: červeno-zelené, zeleno-modré a modro-červené. Z jedného typu nám môže v meste vzniknúť aj viac liniek. Všetky takéto linky budú teda cyklické.

Ostáva nám teda ukázať, že každou ulicou budú prechádzať práve dve linky. To je jednoduché, lebo každá farba sa nachádza práve v dvoch typoch liniek. Jednou červenou ulicou bude chodiť jedna červeno-zelená a jedna modro-červená linka. Pri zelených a modrých uliciach je to podobne.

Tak sme ukázali to, čo sme mali. Vo Farbnom meste môžeme zaviesť linky spomenutých troch typov. Dostaneme niekoľko cyklických liniek a každou ulicou budú prechádzať práve dve linky. Názorné riešenie a ďalšie pohľady na túto úlohu môžete nájsť aj vo videovzoráku.

2.3 Kriminálka Miro Slúži ($\kappa \leq 3$)

opravovali **Aňa** a **Dadka**

Zadanie. *Agenti C. S. I. Žilina vypočúvajú ťažkého zločinca, ktorý im nechce nič prezradiť. Preto si na pomoc zavolali Mr. Mira. Všetko, čo Mr. Miro potrebuje, je psychicky zničiť zločinca nasledujúcou hrou.*

Zločinec si tajne myslí 8 *políčok na šachovnici* 8×8*, pričom žiadne dve neležia v rovnakom riadku ani v rovnakom stĺpci. Potom má Mr. Miro sériu pokusov. Jeden pokus spočíva v tom, že Mr. Miro umiestni* 8 *veží na šachovnicu tak, aby sa žiadne dve neohrozovali. Následne zločinec ukáže, ktoré z veží sa nachádzajú na políčkach, na ktoré myslí. Ak zločinec ukáže na párny*[1] *počet veží, tak Mr. Miro vyhráva. V opačnom prípade sa veže odstránia zo šachovnice a Mr. Miro má ďalší pokus. Určte najmenší počet pokusov, po ktorých vie Mr. Miro určite vyhrať.*

V prvom rade je dobré uvedomiť si, o čo komu ide. Mr. Miro chce vyhrať, nie uhádnuť políčka, na ktoré zločinec myslí. Podarí sa mu to, ak uhádne párny počet veží. V prvom pokuse Mr. Miro tipne hocijakých 8 políčok. Môže tak trafiť:

1. párny počet veží – 0, 2, 4, 6, 8 – vtedy vyhráva a hra končí;

2. nepárny počet veží – 1, 3, 5 – pripočíta sa mu jeden pokus a pokračuje ďalej.

Všimnite si, že 7 veží trafiť nemôže, pretože potom má posledná veža vždy už len jedno políčko voľné, teda je jednoznačne určená.

Pozrime sa na prípady, keď nevyhrá hneď a poďme za radom.

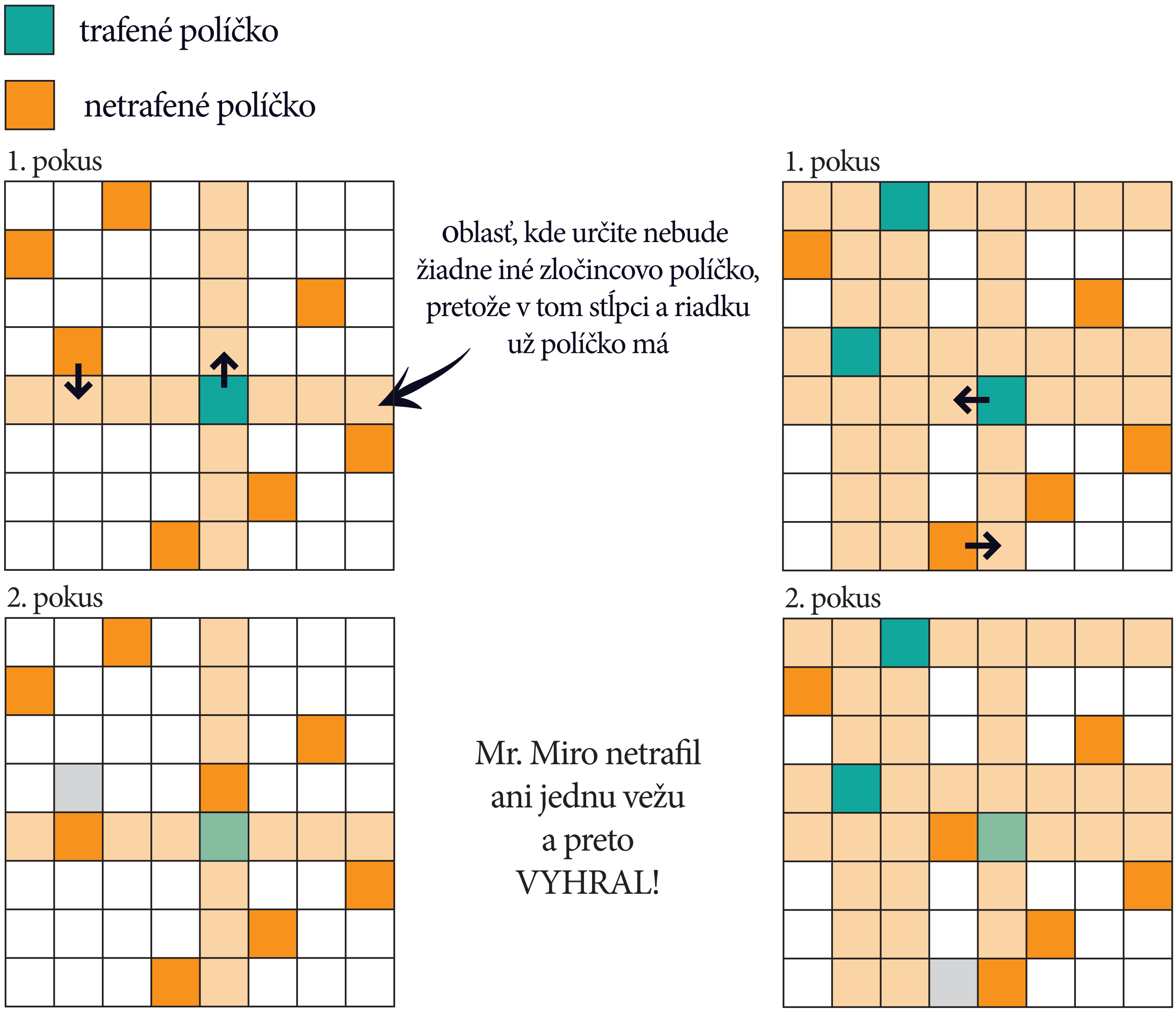
- *Mr. Miro trafil* 1 *vežu.* Mr. Miro už vie o siedmych „zlých" políčkach, takže stačí, že jednu vežu zmení tak, aby ju neuhádol a vyhrá, pretože trafí 0. Teda využije informáciu o tom, kde sa zločincove políčka určite nenachádzajú. Problémom je, že nemôže presunúť len jednu vežu, pretože by ohrozovala inú. Stačí však, keď ohrozenú vežu posunie do riadka (resp. stĺpca), v ktorom predtým bola uhádnutá veža (viď obrázok). Tým pádom uhádne 0 veží a vyhrá. Prečo sa nesnažil uhádnuť napr. 2 veže namiesto žiadnej, je jasné – nemusí uspieť. Na druhej strane, s touto stratégiou určite vyhrá už po druhom pokuse.

- *Mr. Miro uhádne* 3 *alebo* 5 *veží.* V tom prípade je postup rovnaký. Presunie jednu z uhádnutých veží na políčko, kde určite neuhádne, a tú, ktorú bude táto veža ohrozovať posunie tak, ako je spomenuté vyššie. Z nepárneho počtu uhádnutých veží sa stane párny a Mr. Miro vyhráva.

Odpoveď je teda v každom prípade: Mr. Miro určite vyhrá na druhý pokus.

Pre úplnosť riešenia treba ešte dodať, prečo Mr. Miro nevie vyhrať na menej ťahov. Prečo? No Mr. Miro nevie vyhrať na jeden ťah preto, lebo po prvom ťahu sa mu vždy môže stať, že trafí nepárny počet políčok, ako to bolo spomínané na začiatku.

[1] Nula je párne číslo.



2.4 Klub Mirových Spoluhráčov ($\kappa \leq 4$)

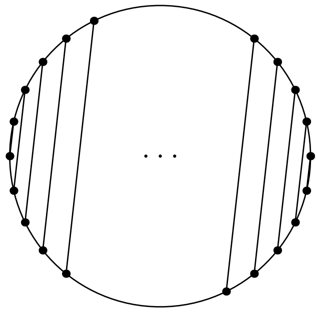
opravovali **Jožo** a **Rado Z.**

Zadanie. *Mr. Miro bol pozvaný na párty dlhorukých basketbalistov. Všetkých 2017 účastníkov párty si posadalo za okrúhly stôl, každý s pohárikom v ruke. Každú sekundu si štrngnú pohárikmi, pričom dodržiavajú nasledovné dve pravidlá: 1. Necinkajú si poháriky do kríža. 2. V danej sekunde si každý môže cinknúť nanajvýš raz. Za koľko najmenej sekúnd si môže cinknúť každý s každým?*

Na začiatok si môžeme skúsiť úlohu vyriešiť pre menší počet basketbalistov, kde si vieme rozpísať alebo nakresliť všetky štrngnutia. Ľahko tak nadobudneme tušenie, že n basketbalistov si vie poštrngať za n sekúnd (okrem zopár výnimok, keď $n < 3$). Poďme teda dokázať toto naše tušenie pre 2017 basketbalistov.

Skúsme najprv zistiť, prečo si basketbalisti nevedia štrgnúť za menej ako 2017 sekúnd. Vieme, že samotný Mr. Miro potrebuje aspoň 2016 sekúnd na to, aby si štrngol so všetkými spoluhráčmi. Prečo ale 2016 sekúnd nestačí? Keďže hráčov je nepárny počet, v prvej sekunde (a rovnako aj v každej ďalšej) si aspoň jeden basketbalista s nikým neštrngne. Tento chudáčik bude teda potrebovať ešte aspoň 2016 ďalších sekúnd, aby si štrngol s ostatnými. Preto potrebujeme aspoň 2017 sekúnd, aby si všetci poštrngali.

Ešte potrebujeme ukázať, že za 2017 sekúnd si basketbalisti môžu poštrngať. Popíšeme teda postup štrngania, ktorým to dosiahnu. Aby si nekrižovali ruky a aby si ich čo najviac štrnglo, tak by si mohli štrngať „rovnobežne", ako na obrázku. V ďalších sekundách budeme potom tento vzor štrngaia „otáčať". Potrebujeme však tento postup opísať poriadne. To môžeme spraviť s využitím basketbalistu, ktorý si neštrngá. V jednej sekunde budeme mať jedného basketbalistu X, ktorý si neštrngá. V tejto sekunde si štrngnú tí basketbalisti, ktorí sú od basketbalistu X vzdialení o rovnaký počet miest. *Vzdialenosťou* basketbalistov A a B tu myslíme počet basketbalistov, ktorí sa medzi nimi nachádzajú (z tej kratšej strany). „Otáčanie" realizujeme tým, že v každej sekunde si zvolíme iného basketbalistu, ktorý si nebude štrngať.



Štrngne si týmto spôsobom každý s každným? To musíme dokázať. Zoberme si teda ľubovoľných basketbalistov A a B a nájdime sekundu, v ktorej si štrgnú. Basketbalistov A a B oddeľuje z jednej strany stola párny a z druhej strany nepárny počet basketbalistov. Je tomu tak preto, lebo zvyšných basketbalistov je 2015, čo je nepárne číslo. V časti stola s nepárnym počtom basketbalistov sa nachádza jeden basketbalista C, ktorý je rovnako vzdialený od basketbalistu A, aj B. Basketbalisti A a B si preto štrngnú v tej sekunde, keď si basketbalista C nebude štrngať.

Týmto sme ukázali, že za 2017 sekúnd si basketbalisti vedia poštrngať každý s každým podľa zadania. To je zároveň aj najkratší čas, za ktorý to je možné.

2.5 Koláč Mira Sýti ($\kappa \leq 7$)

opravovali **Dominik** a **Janko**

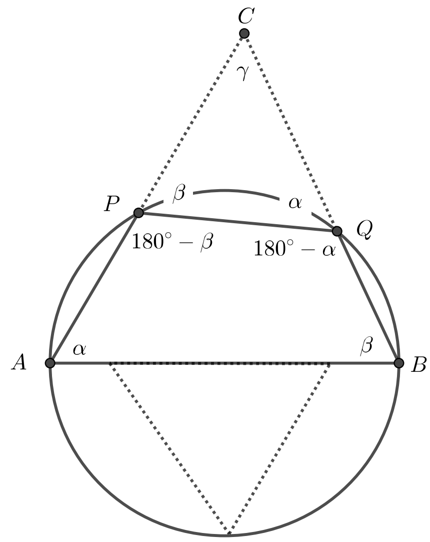
Zadanie. *Betka upiekla pre Mr. Mira koláč, aby bol Mr. Miro spokojný. Koláč má tvar trojuholníka s dĺžkami strán* 19, 20 *a* 21 *cm. Chce ho rozrezať pozdĺž jednej priamky na dva kusy a uložiť ich na kruhový tanier tak, aby sa neprekrývali ani nevyčnievali z taniera. Určte minimálny priemer taniera, pre ktorý sa to môže Betke podariť.*

Máme pred sebou Mr. Mirov trojuholníkový koláč, ktorý sa chystáme rozrezať. Aby sme útvar, ktorý má najdlhšiu stranu a zmestili na tanier, zjavne potrebujeme tanier, ktorý má priemer aspoň a,ináč by sa tam táto strana nevošla. Na úvod je podstatné uvedomiť si, že rez jednou úsečkou môže prejsť nanajvýš dvomi stranami trojuholníka (prechod cez vrchol nerátame). Jedna strana nám teda zostane neporušená. Táto strana bude dlhá aspoň 19 cm, preto priemer Betkinho taniera bude mať najmenej 19 cm.

Takto dostaneme štvoruholník s jednou stranou 19 cm a zostane nám ešte zvyšok koláča v podobe trojuholníka (viď obrázok).

Poďme skúsiť dokázať, že na tanier s priemerom 19 cm môžeme koláč uložiť. Budeme sa snažiť viesť rez čo najdlhšími stranami, „aby sme sa ich zbavili" a koláč zmestili na čo najmenší tanier. O koláči budeme ďalej hovoriť ako o trojuholníku ABC, v ktorom $|AB| = 19$ cm, $|BC| = 20$ cm, $|CA| = 21$ cm. Uložme teda trojuholník ABC na tanier tak, aby strana AB bola priemerom taniera. Body, v ktorých tanier (teda kružnica so stranou AB ako priemerom), pretína strany AC a BC (to sú tie s dĺžkami 21 a 20 cm) nazvime postupne P, Q. Náš koláč, trojuholník ABC, rozrežeme pozdĺž priamky PQ. Odrezali sme tak trojuholník PQC, ktorý vyčnieval z taniera a ostal nám štvrouholník $ABQP$, ktorý je celý uložený na tanieri. Potrebujeme už len ukázať, že sa k nemu na tanier zmestí aj trojuholník PQC.

Keďže je štvoruholník $ABPQ$ tetivový, budú uhly pri protiľahlých vrcholoch dávať súčet 180°. To, že $|\sphericalangle BQP| = 180° - \alpha$ sa dá ukázať aj z toho, že oba sú obvbobové uhly k tetive PB, jeden s vrcholom na dlhšej časti oblúka PB, druhý na jeho kratšej časti. Pre uhly β a $180° - \beta$ analogicky. Preto $|\sphericalangle QPC| = \beta$ a $|\sphericalangle PQC| = \alpha$. Z toho dostávame, že trojuholníky ABC a QPC sú podobné.



Máme teraz k dispozícii strany pôvodného trojuholníka, všetky uhly a podobnosť trojuholníkov. Ale ako na to? Ak si všimneme, polovica taniera je zatiaľ prázdna. Trojuholník PQC zmestíme na tanier, ak bude jeho najmenšia výška nanajvýš 9, 5 cm (polomer taniera). Najmenšiu výšku má najdlhšia strana (to vieme zo vzťahu pre výpočet obsahu trojuholníka). To je tá, ktorá je oproti najmenšiemu uhlu. Tým je uhol β, keďže je najmenší aj v trojuholníku ABC. Potrebujeme teda zistiť výšku na stranu AP v pôvodnom trojuholníku a potom pomocou podobnosti zistiť hodnotu výšky na stranu QC v odkrojenom trojuholníku PQC.

Na zistenie výšky použijeme trik. Porovnáme obsah, ktorý dostaneme pomocou Herónovho vzorca s obsahom, ktorý by sme dostali ako polovicu súčinu základne a výšky. Vieme, že obsah trojuholníka je $S = b \cdot v_b/2$, resp. $S^2 = b^2 \cdot v_b^2/4$. Ale podľa Herónovho vzorca platí aj $S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, kde s je polovičný obvod, v našom prípade $\frac{1}{2}(19 + 20 + 21) = 30$ (cm). Odtiaľ dostávame $S^2 = 29700$ cm^2.

Teda $S^2 = 29700 = 441 v_b^2/4 = b^2 v_b^2/4$, z čoho vyplýva, že

$$v_b = \sqrt{\frac{4 \cdot 29700}{441}} = \frac{20\sqrt{33}}{7} \doteq 16{,}41 \text{ (cm)}.$$

Ďalším krokom bude zistenie koeficientu podobnosti trojuholníkov ABC a QPC. Ten zistíme takto: Vezmeme si trojuholník APB. V ňom poznáme $|AB| = 19$, $|\sphericalangle APB| = 90°$ (podľa Tálesovej kružnice) a dĺžku $|PB| = v_b = 20\sqrt{33}/7$ cm. To je dostatok na to, aby sme vyrátali $|AP|$. Použitím Pytagorovej vety dostávame

$$|AP| = \sqrt{19^2 - \left(\frac{20\sqrt{33}}{7}\right)^2} = \frac{67}{7} \text{ (cm)}.$$

Potom $|PC| = 21 - 67/7 = 80/7\ (\mathrm{cm})$. Keď dáme do pomeru strany oproti uhlu α, dostaneme koeficient podobnosti

$$k = \frac{\frac{80}{7}}{20} = \frac{4}{7}.$$

Hurá, máme náš koeficient. Teraz prichádza prvá chvíľa napätia, či bude výška v_{CQ} na stranu CQ dlhá nanajvýš $9,5$ cm. Poďme na to. $v_{CQ} : v_b = 4 : 7$, teda

$$v_{CQ} = \frac{4}{7} v_b = \frac{4}{7} \cdot \frac{20\sqrt{33}}{7} = \frac{80\sqrt{33}}{49} \doteq 9,38 < 9,5\ (\mathrm{cm}).$$

Výška by teda sedela. Aby sme však boli úplne spokojní, treba ukázať nielen to, že nebude prečnievať vrchol C, ale že nebudú prečnievať ani ostatné vrcholy. Teda treba ukázať, že od päty kolmice na úcečku CQ (volajme ju Z, na obrázku z dôvodu prehľadnosti nie je) po bod C aj Q je vzdialenosť nanajvýš $9,5$ cm. Z obrázka to síce vidno, ale obrázkový dôkaz nie je dôkaz. Teda chceme ukázať, že $|ZQ| \leq 9,5$ cm aj $|ZC| \leq 9,5$ cm. Vec si ešte trocha zjednodušíme – ukážeme, že **väčší** z úsekov ZC, ZQ bude stále menší ako $9,5$ cm. Pretože $|PC| > |PQ|$, bude aj $|ZC| > |ZQ|$ (dlhšej strane prislúcha väčšia časť úseku základne).

V pravouhlom trojuholníku ZCP platí:

$$|ZC|^2 = |CP|^2 - |ZP|^2 = \left(\frac{4}{7} \cdot 20\right)^2 - v_{CQ}^2 = \frac{102400}{2401}\ (\mathrm{cm}),$$

takže $|ZC| = \sqrt{102400/2401} = 320/49 \doteq 6,53 < 9,5\ (\mathrm{cm})$. Keďže $|ZQ| < |ZC|$, bude aj $|ZC| < 9,5$ cm.

Teda rozrezaný koláč – štvoruholník aj trojuholníkový odrezok – sa zmestia na tanier s priemerom 19 cm a Betka nemusí behať do Ikey po väčší.

2.6 Kombinatoriku Miro Stopuje

opravovali **Marek** a **Marián**

Zadanie. *Mr. Miro je osvedčený detektív, takže pomáha pri pátraní kombinačných čísel. Nájdite dvojicu prirodzených čísel n a k takú, aby kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ bolo deliteľné tisícimi a navyše - a) číslo n bolo najmenšie možné, - b) súčet $n + k$ bol najmenší možný. Poznámka. Kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ označuje počet spôsobov, ako vybrať z~n predmetov k predmetov, pričom nám nezáleží na poradí. Možno ho vypočítať ako*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}.$$

Začneme hľadaním takého čísla, že $\binom{n}{k}$ je deliteľné číslom 1000. Jedno také je zjavne $\binom{1000}{1}$, ale nenašli by sme niečo s menším n? Aby číslo

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots(1)}$$

bolo deliteľné 1000, tak musí byť v prvočíselnom rozklade čísla $\binom{n}{k}$ aj číslo $2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125$. Najprv sa postaráme o prítomnosť súčiniteľa 125. Isto keď $n = 125$, tak ho tam máme, teda aspoň pri väčšine k-čok. Prichádzajú dve otázky – nemôže byť menšie? Pre ktoré k, ak také existuje, už úplne vyhráme?

Vyriešme prvú otázku. Ukážeme, že také kombinačné číslo nie je. Poďme to dokazovať sporom, čiže budeme predpokladať, že také riešenie existuje a z jeho vlastností ukážeme, že v skutočnosti také nie je. Nech $n < 125$ a $k < n$ je riešenie. Vieme, že v postupnosti prirodzených čísel je každé piate deliteľné 5 a každé dvadsiate piate je deliteľné 25. Taktiež musí platiť, že máme k súčiniteľov v čitateli a týchto k súčiniteľov, ktoré idú po sebe a začínajú na ľubovoľnom mieste, má nanajvýš $\lceil \frac{k}{5} \rceil + \lceil \frac{k}{25} \rceil$ pätiek v prvočíselnom rozklade. V menovateli máme obdobne presne $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor + \lfloor \frac{k}{25} \rfloor$ pätiek v rozklade, tu začíname od jednotky. Lenže tieto čísla sa pre všetky uvažované k najviac líšia o 2, a teda dostávame spor s tým, že $\binom{n}{k}$ je deliteľné 125.

Prichádza odpoveď na druhú otázku. Uvažujme $n = 125$. Teraz chceme nájsť zodpovedajúce k. Keď sa pozrieme na zopár malých k zistíme, že stále nemáme zabezpečenú deliteľnosť ôsmimi. Tu je dobré si uvedomiť, že vždy, keď zväčšíme k, tak aj do čitateľa, ako aj do menovateľa pridáme číslo buď nedeliteľné dvoma, alebo deliteľné dvoma, vždy budú mať obe rovnakú paritu. Preto musíme zväčšiť k tak, aby sme do čitateľa pridali 16 a v menovateli iba 2. Vieme, že začíname u $n = 125$, čo je o tri čísla vedľa od mocniny dvojky 128. Tu sa môžete zamyslieť, že keď budeme čísla zväčšovať postupne, tak v čitateli naozaj narazíme na číslo deliteľné 16 skôr. Keď to vyčíslime, tak dostaneme zodpovedné $k = 14$. Kombinačné číslo $\binom{125}{14}$ je konečne deliteľné 1000.

Teraz sa pozrime na druhú časť, kde má byť $n + k$ minimálne. Vieme, že $125 < n + k \leq 125 + 14 = 139$, tu by sa ponúkala hrubá sila ako vypísať všetky možnosti, avšak my také veci predsa nepotrebujeme. Poznajúc, že 128 je mocnina dvojky, môžeme ho skúsiť zvoliť za naše n a dosiahnúť tak lepší výsledok. Pre toto n potrebujeme zvoliť k tak, aby čitateľ obsahoval aj 125, teda zvolíme $k = 4$. Ľahko sa presvedčíme, že $\binom{128}{4}$ je delieteľné 1000.

Teraz vieme $125 < n + k \leq 132$. Už nám stačí ukázať, že žiadne menšie súčty nie sú. To môžeme už overiť všetkými možnosťami alebo ďalšími úvahami o n a k. Pre $n = 126$ vieme zistiť rovnako ako pred tým, že najmenšie je vhodné $k = 7$. Pre $n = 127$ sa presvedčíme, že k neexistuje, pretože všetky kombinačné čísla $\binom{127}{k}$ sú nepárne. Pre $n \geq 129$ máme k, ktoré zmenší skúmaný súčet, iba $k = 1$ a $k = 2$. Tie vybavíme následovne: $k = 1$ byť nemôže, pretože to potrebujeme najmenej $\frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = 1000$, príslušné (jediné) n je prekvapivo $n = 1000$. Pre $k = 2$ môžeme mať zmenšujúci výsledok len pri $\binom{129}{2}$, čo nie je deliteľné 1000.

Takže naše riešenia sú tieto: pre najmenšie n je to $\binom{125}{14}$ a pre najmenší súčet $n + k$ je to $\binom{128}{4}$, čoho súčet $n + k = 132$.

Komentár

Vo vašich riešeniach sa občas vyskytli aj riešenia typu „však je to konečný počet možností, to sa nakódi“ (naprogramuje). Takýmto prístupom síce nájdeme vhodné hodnoty n a k, dokonca aj bez veľkej námahy, ale nie je to zmyslom tohto seminára a ani tejto úlohy. Všimnite si, že táto úloha sa dala vyriešiť aj bez použitia počítača. Úvahy, ktoré sme použili, sa vám môžu zísť pri súťažiach, kde nemáte k dispozícii počítač, a taktiež aj pri úlohách, kde nemáme konečný počet možností. Preberanie všetkých možností pomocou počítača bez žiadnej myšlienky nie je to, o čo v KMS ide, preto sme ho v súlade s našimi pravidlami nehodnotili plným počtom bodov.

2.7 Kružnice Medziľudských Súvislostí

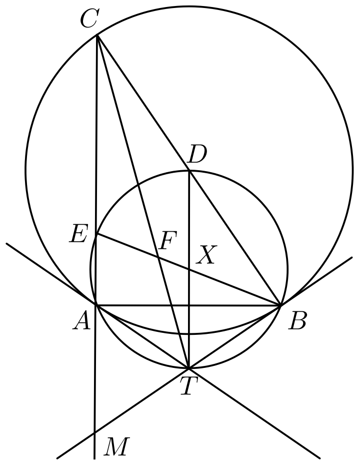
opravovala **Kika**

Zadanie. *Mr. Miro sa vo voľnom čase zaoberá medziľudskými pomermi. Pomery v geometrii sú však preňho easy, tie prenecháva vám.*

Majme trojuholník ABC s opísanou kružnicou k. Dotyčnice ku kružnici k v bodoch A a B sa pretínajú v bode T. Kružnica opísaná trojuholníku ABT pretína priamky BC a AC postupne v bodoch D a E ($D \neq B$ a $E \neq A$). Priamky CT a BE sa pretínajú v bode F. Predpokladajme, že bod D je stredom úsečky BC. Určte pomer $|BF| : |BE|$.

Chceme zistiť pomer dĺžok dvoch úsečiek. Zatiaľ o nich nič nevieme, asi len toľko, že $|BE| > |BF|$, pretože bod F je súčasť úsečky BE. V zadaní máme nejaké podmienky pre bod D, tak sa pozrime najprv naň, nakoľko sa všetko odvíja od jeho polohy. Označme $|\sphericalangle ACB|$ ako γ. K nemu sú $\sphericalangle BAT$ a $\sphericalangle ABT$ úsekové a teda ich veľkosť je tiež γ. Keďže súčet uhlov v trojuholníku je 180°, vieme dopočítať $|\sphericalangle ATB| = 180° - 2\gamma$. Bod D je tiež na kružnici opísanej trojuholníku ATB, tým pádom štvoruholník $ATBD$ je tetivový.

Súčet protiľahlých uhlov v tetivovom štvoruholníku je 180°, preto $|\sphericalangle ADB| = 2\gamma$. Uhol CDA je k nemu susedný a má veľkosť $180° - 2\gamma$. Teraz sa pozrime na trojuholník CDA. Poznáme uhly pri vrcholoch C a D. Dopočítaním veľkosti uhla pri vrchole A dostaneme, že $|\sphericalangle CAD| = \gamma$. Tento trojuholník je rovnoramenný so základňou AC. Musí preto platiť, že $|AD| = |CD|$ a zo zadania vieme, že $|BD| = |CD|$, tieto tri dĺžky sú teda zhodné. Inak povedané vzdialenosť bodu D od bodov A, B a C je rovnaká. Jediný bod, ktorý túto vlastnosť má, je stred kružnice opísanej trojuholníku ABC. Zjavne platí, že BC je priemerom tejto kružnice. Z toho vyplýva, že kružnica opísaná trojuholníku ABC je Tálesova kružnica a $|\sphericalangle CAB| = 90°$.



Označme prienik priamok AC a BT ako M. O uhle CBM vieme, že má veľkosť 90° (pretože je to aj uhol DBT a BT je dotyčnica kolmá na DB). Štvoruholník $DBTE$ je tetivový, a tak aj $|\sphericalangle DET| = 90°$. Úsečky DE a BT sú kolmé na BD a sú rovnobežkami. Nakoľko je bod D stred strany BC a úsečka DE je rovnobežná s BT, respektíve s BM, tak úsečka DE je stredná priečka v trojuholníku MBC a bod E je stred strany MC.

Označme stred kružnice opísanej trojuholníku ATB ako X. Vieme, že $|XE| = |XT| = |XD| = |XB|$. Uhly BXD a EXT sú vrcholové, čo znamená, že sú zhodné. Preto aj trojuholníky BXD a EXT sú zhodné. Z toho vyplýva, že úsečky ET a BD sú rovnobežné a aj ET je stredná priečka. V trojuholníku MCB sú úsečky BE a CT ťažnice. Pretínajú sa v bode F. Ťažnice sa navzájom delia v pomere $1 : 2$, pričom dlhší úsek je ten pri vrchole. Hľadaný pomer je preto $|BF| : |BE| = 2 : 3$.

2.8 Kachličky Miro Skrášľuje

opravoval **Zajo**

Zadanie. *Povesť Mr. Mira sa doniesla až do zahraničia. Zavolal si ho Jaromír Jágr, aby mu pomohol s výzdobou kuchyne. Jágr má v kuchyni vykachličkovaný štvorec $n \times n$ štvorcovými kachličkami 1×1. Chce ho vyzdobiť pomocou niekoľkých pravouhlých rovnoramenných trojuholníkov s preponou dĺžky 2, ktorých vrcholy sa budú nachádzať v mrežových bodoch štvorčekovej siete, ktorú vytvárajú kachličky. Navyše každá strana kachličky sa musí nachádzať práve v jednom trojuholníku (vnútri neho alebo na okraji). Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je to možné.*

Upresnenie. *Keď sa kachličky dotýkajú stranou, tak ich strany, ktoré sa dotýkajú, splývajú do jednej úsečky. Tieto strany teda nemôžu byť v dvoch rôznych trojuholníkoch.*

Riešenie takejto úlohy sa bude skladať z dvoch častí. Najprv sa pokúsime orezať množinu čísel n, pre ktoré sa štvorce $n \times n$ budú dať „vytrojuholníkovať“ pomocou nejakých nutných podmienok, ktoré musí n spĺňať. Potom pomocou konkrétnej konštrukcie (indukciou, alebo rekurzívnym popísaním) ukážeme, že všetky n, ktoré nám ostali, naozaj budú spĺňať podmienku zo zadania.

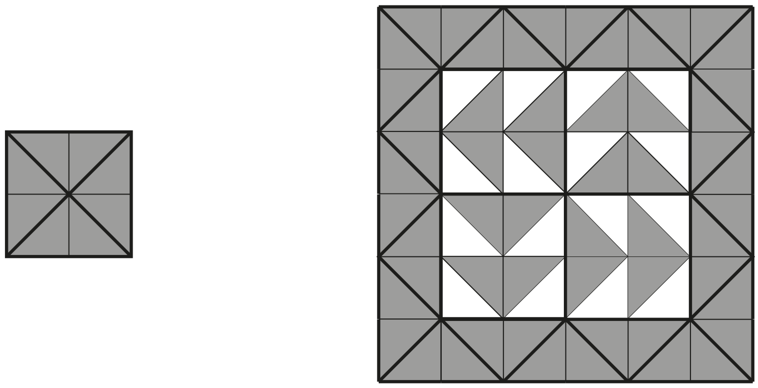
Začnime pozorovaním, že na celom obvode, štvorca, musia byť priložené trojuholníky preponou. Ak by na niektorej strane štvorca bol priložený trojuholník odvesnou, tak aspoň dva jeho vrcholy sa nebudú nachádzať v mrežových bodoch. Párna dĺžka prepony preto zaručuje, že n musí byť párne.

Na druhú podmienku využijeme, aký je celkový počet hrán. Zvislých hrán je n v každom z $n+1$ stĺpcov a vodorovných je rovnako veľa. Dokopy máme $2n(n+1)$ hrán. Každý z umiestnených trojuholníkov pokryje tri takéto hrany (dve preponou a jednu výškou na preponu). Preto číslo $2n(n+1)$ musí byť deliteľné tromi, teda n dáva zvyšok 0 alebo 2 po delení tromi.

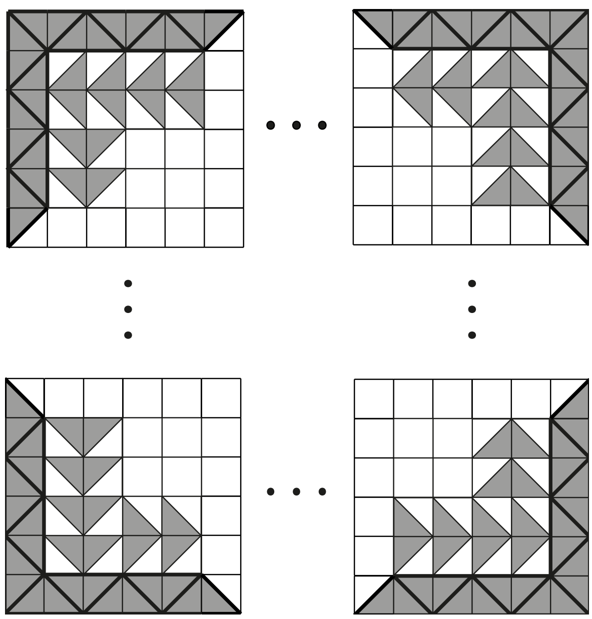
Spojením týchto dvoch podmienok dostávame, že n dáva jeden zo zvyškov $\{0, 2\}$ po delení šiestimi (pri ostatných zvyškoch nie je splnená jedna z podmienok).

Prestúpme do druhej časti riešenia a skúsme nájsť postup, podľa ktorého budeme „trojuholníkovať“ štvorce takýchto veľkostí. Ako rozumná možnosť sa ponúka vymyslieť nejaký spôsob pre malé čísla – 2, 6 a potom navrhnúť spôsob ako stranu týchto riešení zväčšovať o 6.

Štvorec 2×2 vydláždime priamočiaro a 6×6 dostaneme po chvíli hrania sa:



Jeden z týchto štvorcov (podľa zvyšku čísla n po delení šiestimi) budeme obaľovať z každej strany „pásikom“ hrubým 3:



Takýmto obalovaním vieme zväčšiť rozmer vydláždeného štvorca o 6. Týmto sme dostali všeobecný postup, ako vydláždiť všetky štvorce pre $n = 6k$ a pre $n = 6k + 2$, kde k je ľubovoľné .

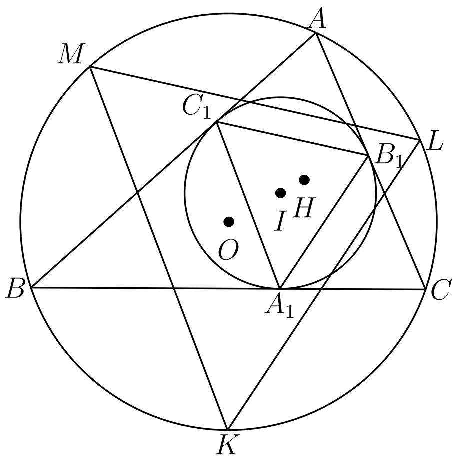
2.9 Kolinearita — Mirova Spokojnosť

opravoval **Pedro**

Zadanie. *Mr. Miro je spokojný, keď je najedený. Okrem toho je spokojný aj vtedy, keď nájde tri body ležiace na jednej priamke.*

Majme trojuholník ABC. Označme A_1, B_1, C_1 postupne body dotyku jeho vpísanej kružnice so stranami BC, AC, AB. Nech O a I sú postupne stredy kružnice opísanej a vpísanej trojuholníku ABC a H_1 je ortocentrum trojuholníka $A_1B_1C_1$. Dokážte, že body O, I, H_1 ležia na jednej priamke.

Označme druhé priesečníky priamok AI, BI, CI s kružnicou opísanou trojuholníku ABC (nech je to kružnica k) postupne ako K, L, M. O týchto bodoch vieme, že sú to Švrčkove body k bodom A, B, C v trojuholníku ABC.[2]



Ukážeme, že platí: $C_1B_1 \parallel LM$. Zo známej vety o Švrčkových bodoch plynie, že vzdialenosť Švrčkovho bodu od „susediacich" vrcholov je rovná jeho vzdialenosti od stredu vpísanej kružnice. Inak povedané pre našu úlohu platí $|LI| = |LA|$ a tiež $|MI| = |MA|$. To ale znamená, že štvoruholník $MILA$ je vlastne deltoid[3]. Pre deltoid platí, že jeho uhlopriečky sú na seba kolmé. Teda ML je kolmé na IA. Na IA je však kolmá aj priamka C_1B_1, pretože štvoruholník B_1IC_1A je tiež deltoid, dokonca s pravými uhlami. Preto evidentne $C_1B_1 \parallel LM$. Analogicky by sme sa vedeli dopracovať aj k rovnobežnostiam $KM \parallel A_1C_1$ a $KL \parallel A_1B_1$. Vidíme teda, že trojuholníky $A_1B_1C_1$ a KLM sú nielen podobné, ale ich strany sú aj rovnako orientované.

Keďže sú rovnako orientované, tak existuje bod v rovine, ktorý je stredom rovnoľahlosti, ktorá zobrazuje trojuholník $A_1B_1C_1$ na trojuholník KLM. Toto je známy fakt, ale dalo by sa ho neformálne zdôvodniť tým, že v jednom zo stredov rovnoľahlostí kružníc k a l (kružnica opísaná trojuholníku $A_1B_1C_1$) sa tieto rovnobežné tetivy zobrazujú na seba. Označme si tento bod S.

Vieme, že aj významné body rovnoľahlých trojuholníkov sa na seba zobrazujú. Bod I je zrejme stredom kružnice l, a preto sa v rovnoľahlosti so stredom S zobrazí na bod O. Teda body S, I, O ležia na jednej priamke. V trojuholníku $A_1B_1C_1$ je bod H ortocentrom. Čo tak ukázať, že v trojuholníku KLM je ortocentrom bod I?

[2] O Švrčkových bodoch si môžete prečítať v seriáli MKS Geometria trojuholníka od strany 29, ktorý nájdete na adrese http://mks.mff.cuni.cz/archive/36/serial.pdf

[3] Hoci všetci vieme, že je to kváder http://sedita.sk/vyrobky/oblatky/mila :)

To je ale ľahké, lebo z definície bodov K, L, M platí, že trojice bodov (K, I, A), (L, I, B) a (M, I, C) ležia na priamkach. O priamke IA sme už ukázali, že je kolmá na ML a pre zvyšné dve dvojice priamok je to analogické. Preto I je skutočne ortocentrom trojuholníka KLM.

Teda bod H sa v spomínanej rovnoľahlosti zobrazí do bodu I, a teda aj body S, H, I ležia na priamke. To ale znamená, že aj body H, I, O ležia na priamke, čo je presne to, čo sme chceli dokázať.

2.10 Kvintľanov Miro Skúša

opravoval **Vodka**

Zadanie. *Mr. Mira pozvali do školy na besedu. Pre žiakov si chce pripraviť nasledovnú úlohu. Povie im, že si myslí monický polynóm*[4] *stupňa 2017 s celočíselnými koeficientmi. Potom im povie k celých čísel n_1, n_2, …, n_k, hodnotu súčinu $P(n_1)P(n_2)\dots P(n_k)$ a „Easy!“ Úlohou žiakov je nájsť polynóm, ktorý vyhovuje týmto podmienkam. Mr. Miro navyše chce, aby existoval len jeden polynóm, ktorý vyhovuje spomenutým podmienkam. Nájdite najmenšie prirodzené číslo k, pre ktoré sa Mr. Mirovi môže podariť pripraviť takúto úlohu.*

Ukážeme, že riešením je $k = 2017$. Na to, aby sme to dokázali, potrebujeme urobiť dve veci. Nájsť konštrukciu pre $k = 2017$ (t. j. polynóm a 2017 čísel, ktoré Mr. Miro povie deťom) a ukázať, že pre menšie k to Mr. Miro nevie spraviť.

Prepokladajme preto, že $k \leq 2016$. Nech si Mr. Miro myslí polynóm $P(x)$. Ukážeme, že v tomto prípade úloha, ktorú Mr. Miro zadá nebude mať nikdy jednoznačné riešenie. A to tak, že nájdeme iný polynóm, ktorý vyhovuje podmienkam. Bude to polynóm $Q(x) = P(x)+(x-n_1)(x-n_2)\cdots(x-n_k)$. Zjavne $Q(x)$ má celočíselné koeficienty (aj $P(x)$ mal) a je monický stupňa 2017, pretože $k \leq 2016$. Tak isto platí, že $Q(n_i) = P(n_i)$, pre všetky $1 \leq i \leq k$. Preto aj $P(n_1)P(n_2)\cdots P(n_k) = Q(n_1)Q(n_2)\cdots Q(n_k)$. To znamená, že polynóm $Q(x)$ vyhovuje všetkým podmienkam Mr. Mira, a preto riešenie nie je jednoznačné.

Teraz potrebujeme zostrojiť polynóm a nájsť 2017 čísel, tak aby úloha Mr. Mira mala jenoznačné riešenie. Dobré bude položiť súčin $P(n_1)P(n_2)\cdots P(n_{2017}) = 1$, lebo potom bude málo možností na $P(n_i)$. Presnejšie dve – pre všetky i bude $P(n_i) = \pm 1$.

Mirov polynóm môže byť preto $P(x) = (x - n_1)(x - n_2)\cdots(x - n_{2017}) + 1$, pre vhodnú voľbu čísel n_i. Bolo by dobré, keby deti vedeli vylúčiť možnosť $P(n_i) = -1$. Na to použijeme takú vec, že pre polynómy s celočíselnými koeficientami platí $a-b \mid P(a)-P(b)$. Ak teda máme a, b také, že $P(a) = 1$ a $P(b) = -1$, tak nutne $a-b \mid 2$. Preto položíme $n_i = 3i$, pre všetky $1 \leq i \leq 2017$. Zjavne potom nemôže nastať situácia, že $P(n_i) = 1$ a $P(n_j) = -1$, pre nejaké i, j. A keďže nemôže pre všetky i platiť, že $P(n_i) = -1$, lebo 2017 je nepárne, tak nutne naozaj $P(n_i) = 1$ pre všetky $1 \leq i \leq 2017$.

Otázka je tá, či je týmto už polynóm jednoznačne určený. Odpoveď je áno, pretože $P(x) - 1$ musí mať za korene všetky čísla 3, 6, 9, …, $3 \cdot 2017$ Preto nutne $P(x) - 1 = (x-3)(x-6)\cdots(x - 2017 \cdot 3)R(x)$, pre nejaký polynóm $R(x)$. No keďže $P(x) - 1$ je monický polynóm stupňa 2017, tak nutne $R(x) = 1$. Samozrejme, ak je jednoznačne určený polynóm $P(x) - 1$, tak z neho vieme jednoznačne určiť $P(x)$. Našli sme preto polynóm a 2017 čísel, pre ktoré má úloha od Mr. Mira jediné riešenie. Záver je, že $k = 2017$.

[4] Monický polynóm je polynóm s vedúcim koeficientom 1, teda v tvare $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.