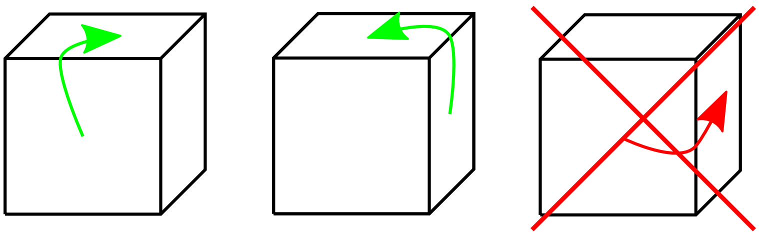
Korešpondenčný matematický seminár
XXXIX. ročník, 2017/2018
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 3. kola zimnej časti

3.1 Kocka Miestami Sladká ($\kappa \leq 1$)

opravovala **Ivka**

Zadanie. *Kuchárka vyryla do kocky cukru dierky a spravila si z nej tak hraciu kocku. Potom sa ju snažila pootáčať, aby vyzerala pekne. Kocka vyzerá pekne, keď má na vrchu šestku a na jej prednej strane (otočenej ku kuchárke) je štvorka. Kuchárka môže otáčať kockou okolo všetkých hlavných osí okrem vertikálnej (pozri obrázok), a to vždy len o 90°. Koľko najmenej otočení potrebuje, aby vedela s určitosťou, že kocka bude vyzerať pekne, nech je na začiatku otočená ľubovoľne?*



Našou úlohou je prísť na najmenší počet otočení kocky (dovolené otočenia sú okolo osí x a y) takých, že ich výsledkom pri ľubovoľnej východzej pozícii, je kocka, ktorá má na vrchnej strane číslo 6 a na prednej strane číslo 4.

Prvá vec, ktorú je dobré si uvedomiť, je, že na hracej kocke spolu susedia čísla 4 a 6 hranou. Z toho vyplýva, že máme $6 \cdot 4 = 24$ možností, ako kocka mohla vyzerať na začiatku. Totiž prvé číslo môžeme uložiť na kocku ľubovoľne, druhé už musí byť vedľa neho cez spoločnú hranu, teda už máme na druhé číslo iba 4 možnosti.

Jedna cesta, ako vyriešiť úlohu, by bola preskúmať všetkých týchto 24 možností a vybrať zo všetkých počtov otočení ten najväčší. My si tu však ukážeme trochu menej pracné riešenie.

Poďme najprv uvažovať o posúvaní čísla 4. Ak je na začiatku 4 na prednej strane, nepotrebujeme už toto číslo presúvať ďalej. Ak by bola na vrchnej či spodnej strane, stačí nám jedno otočenie okolo osi x smerom nahor/nadol a už je 4 na svojom mieste. Ak by bola na niektorej z bočných stien, najprv ju jedným otočením okolo osi y dostaneme na vrchnú/spodnú a potom ju pretočíme okolo osi x na jej právoplatné miesto vpredu. Ak by bola na zadnej strane, dvomi otočeniami okolo osi x ju dostaneme dopredu. Teda najviac na 2 otočenia dopravíme 4 na správne miesto.

Keď sme si prešli možnosti pre 4, poďme sa pozrieť aj na číslo 6. To chceme dostať na vrch našej kocky. Ak je na vrchu hneď na začiatku, vyhrali sme. Ak je na prednej či zadnej strane, dostaneme ju tam jedným otočením okolo osi x. Pre prípady, že je na bočných stenách, je to rovnaké, avšak otáčame okolo osi y. Ak by bola naspodu, treba nám dve otočenia okolo niektorej z osí, aby bola navrchu. Teda aj pre 6 máme najviac 2 možnosti. Z toho nám vyplýva, že v najhoršom prípade kocku dostaneme do požadovanej polohy $2 \cdot 2 = 4$ pohybmi .

Teraz ešte treba nájsť rozloženie, pre ktoré sa to na menej ako 4 pohyby urobiť nedá. Až vtedy bude dôkaz, že nami hľadané číslo je 4, ukončený. Takéto rozloženie je také, kedy je 6 vpredu a 4 na vrchu kocky. Vtedy nám menej ako 4 otočenia nikdy nebudú stačiť.

Odpoveď je teda, že našu sladučkú kocku vieme dostať z ľubovoľnej východzej pozície do peknej pozície štyrmi otočeniami.

3.2 Kvôli Mastnému Soté ($\kappa \leq 2$)

opravovali **Danka** a **Kika**

Zadanie. *Jurkovi nechutilo soté, čo mal na obed, tak namiesto jedenia obdivoval svoju tácku. Tácka má tvar šesťuholníka $ABCDEF$ a je položená na kruhovom obruse tak, že všetky vrcholy šesťuholníka $ABCDEF$ ležia na jeho obvode. Jurko si začal po tácke a po stole kresliť a označil si priesečník priamok AC a FD ako P a priesečník priamok AE a BF ako Q. Potom si všimol, že platí $|BF| = |BD|$, $|AC| = |CE|$, $|PA| = |PF|$ a že priamka PQ je osou uhla APF. Zistite pomer obsahov trojuholníkov ACE a BDF.*

Naším prvým krokom bude spísanie si všetkých daných vecí:

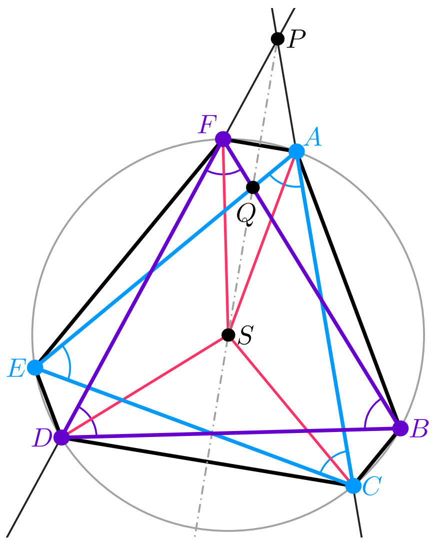
- body A, B, C, D, E, F ležia na kružnici;
- bod P je priesečníkom priamok AC a DF, pričom $|AP| = |FP|$;
- bod Q je priesečníkom priamok AE a BF;
- priamka PQ je osou uhla APF;
- $|BF| = |BD|$;
- $|AC| = |CE|$.

Našou úlohou je zistiť pomer obsahov trojuholníkov ACE a BDF. Poďme teda na to.

Už pri prvom (dobrom) náčrte si môžeme všimnúť, že ide o symetrickú úlohu. Úsečky AP a FP sú rovnako dlhé, takže trojuholník APF je rovnoramenný. Zjavne os základne rovnoramenného trojuholníka prechádza vrcholom oproti nej a je zhodná s osou uhla medzi ramenami. Keď tento fakt aplikujeme na našu úlohu, zistíme, že body P a Q ležia na osi úsečky AF. To znamená, že táto os je totožná s priamkou PQ. O nej zas vieme, že je osou uhla APF. Ľubovoľný bod na osi úsečky je rovnako vzdialený od jej krajných bodov. Ak teda Q leží na osi úsečky AF, musí platiť, že $|AQ| = |FQ|$.

Teraz presuňme našu pozornosť na uhly. Zo zadania vieme, že trojuholníky BDF a ACE sú tiež rovnoramenné. Preto uhly pri ich základniach sú rovnaké, teda $|EAC| = |CEA|$ a $|DFB| = |CDF|$.

Vieme, že $|PFA| = |PAF|$ a taktiež $|AFQ| = |FAQ|$ (pretože $|AQ| = |FQ|$). Potom uhol DFQ, resp. DFB vieme vyjadriť ako $180° - |PFA| - |AFQ|$. Podobne vieme uhol CAQ, resp. CAE vyjadriť ako $180° - |PAF| - |FAQ|$. Z toho vidíme, že uhly DFB a CAE sú rovnaké.



Trojuholníky, ktoré máme porovnávať majú teda rovnaké vnútorné uhly – sú podobné. Pozor! To však ešte neznamená, že sú zhodné. Aby sme mohli povedať, že majú rovnako dlhé strany potrebujeme kružnicu. Každému trojuholníku vieme jednoznačne opísať kružnicu. Pre trojuholníky ACE a BDF je to tá istá kružnica. Označme si S jej stred. Bod S leží na osi strany AF (úsečke PQ), pretože je rovnako vzdialený od oboch týchto bodov. Keď bod S spojíme s ľubovoľnými dvoma bodmi z množiny $\{A, B, C, D, E, F\}$, tak vytvoríme rovnoramenný trojuholník, nakoľko bod S je rovnako vzdialený od všetkých. Na základe toho vieme jednoducho dokázať, že aj $|FBD| = |ACE| = |BDF| = |CEA| = |DFB| = |EAC|$. Teda trojuholníky ACE a BDF sú rovnostranné. Majú tú istú opísanú kružnicu, z čoho vyplýva, že sú zhodné. Ak nevidíte prečo, tak si porátame dĺžku strany, ktorú si označíme a. Konkrétne ju vyjadríme pomocou polomeru kružnice.

V rovnostrannom trojuholníku je stred opísanej kružnice aj ťažiskom. Ťažnice sú súčasne výškami. Polomer tvorí $\frac{2}{3}$ výšky. Teda $\frac{3}{2}r = v$. Výšku vieme vypočítať z Pytagorovej vety. Tá nám v tomto prípade tvrdí $a^2 = v^2 + (a/2)^2$, z čoho keď vyjadríme a dostávame:

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}}v = \sqrt{3}r.$$

Polomer je v oboch trojuholníkoch rovnaký, pretože majú tú istú opísanú kružnicu. Potom majú teda aj rovnaké strany. Tým je dokázané, že trojuholníky ACE a BDF sú zhodné a teda:

$$\frac{S_{ACE}}{S_{BDF}} = 1.$$

Taktiež si môžete premysliet, že trojuholník BDF je vlastne otočením trojuholníka ACE alebo naopak.

3.3 Kamilka Musí Sedieť ($\kappa \leq 3$) opravoval **Dominik**

Zadanie. *Kamilka už dojedla obed, ale musí ešte čakať, kým pani učiteľka donúti Jurka aspoň čosi zjesť. Našťastie si na jedálenskom obruse našla štvorčekovú mriežku rozmerov* 2×13. *Zobrala si svojich* 13 *lístkov na obed s číslami* 1, 2, …, 13 *a uložila ich do spodného riadku mriežky v tom istom poradí, na každé políčko práve jeden lístok. Potom začala lístky presúvať. V jednom ťahu môže presunúť lístok do niektorého vedľajšieho prázdneho políčka (hore, vľavo, vpravo alebo dole). Koľko najmenej ťahov potrebuje Kamilka spraviť, aby sa všetky lístky nachádzali v spodnom riadku a v opačnom poradí (*13, 12, …, 1*)?*

V úlohách ako je táto sa riešenie zvyčajne rozdeľuje na dve časti: je potrebné ukázať, ako úlohu čo najefektívnejšie riešiť, a čo je nemenej podstatné – aj to, že to už lepšie nejde. Prípadne naopak: najprv ukázať, že lepšie úloha riešiť nejde, a potom ukázať svoje riešenie. My začneme tým, že si minimálny počet ťahov zdola ohraničíme.

Na to, aby sme posunuli lístok číslo 13 na správnu pozíciu, teda na pozíciu číslo 1, potrebujeme určite minimálne 12 ťahov, pretože ho potrebujeme posunúť minimálne 12-krát doľava. Podobne potrebujeme 12 ťahov aj pre posun lístka číslo 1 na pozíciu číslo 13. Ak sa takto pozrieme na všetky lístky, zistíme, že na takéto posúvanie v riadku potrebujeme aspoň $12 + 12 + 10 + 10 + 8 + 8 + 6 + 6 + 4 + 2 + 2 + 0 = 84$ ťahov.

Lenže podľa zadania na jednom políčku nesmú byť naraz dva lístky, čo znamená, že budeme potrebovať aj nejaké ďalšie ťahy na to, aby sa lístky obišli. Koľko takých ťahov potrebujeme? Vieme, že v každej dvojici lístkov sa poradie v riadku zmení, teda ak na začiatku bol jeden lístok naľavo od toho druhého, teraz bude napravo. To znamená, že nemôže existovať dvojica lístkov, ktoré sa navzájom nevyhnú, teda existuje maximálne jeden lístok, ktorý nespraví žiadny ťah nahor. Z toho vyplýva, že 12 lístkov takýto pohyb urobí. Samozrejme, ak sa raz lístok pohne hore, tak sa niekedy musí aj vrátiť, takže spraví v konečnom dôsledku dva ťahy. Celkovo nám teda k 84 ťahom v riadku pribudne ešte aspoň $12 \cdot 2 = 24$ ťahov, čím si minimálny počet ťahov určíme na 108.

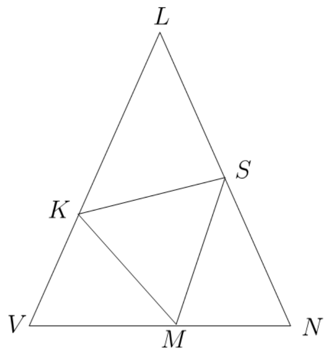
Ukážme si teraz, ako možno úlohu vyriešiť pre počet ťahov 108: Najprv posunieme všetky čísla okrem 1-ky o riadok vyššie – 12 ťahov. Potom 1-ku presunieme na pozíciu číslo 13 – 12 ťahov. Následne začneme každý z lístkov v poradí od 2 po 13 umiestňovať na svoju pozíciu. Pre lístky s číslom 2 až 6 to budú len pohyby dole a vpravo, 7-ka sa posunie len dole a pre lístky s číslom 8 až 13 to budú pohyby vľavo a dole. Môžeme si všimnúť, že okrem 1-ky spraví každý lístok presne 1 pohyb nahor, 1 pohyb nadol a zvyšný počet ťahov bude rovnaký ako v prvej časti riešenia, keďže sa lístky budú hýbať len jedným smerom v riadku tak, aby sa posunuli na pozíciu, kde majú byť. Celkovo teda využijeme $12 + 12 + (12 + 1) + (10 + 1) + \cdots + (10 + 1) = 108$ ťahov.

Týmto sme splnili obidve potrebné podmienky na to, aby sme dostali riešenie. Teda Kamilka musí spraviť najmenej 108 ťahov.

3.4 Korenička, Makovnička, Soľnička ($\kappa \leq 4$)

opravoval **Adam**

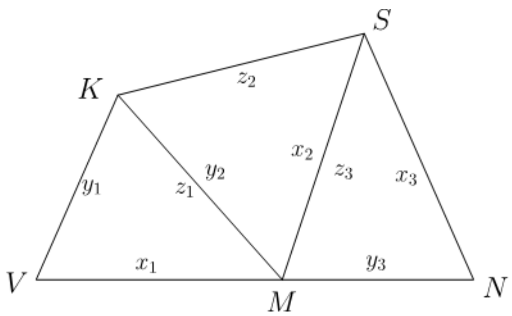
Zadanie. *Tomáško miluje, keď má na stole systém a poriadok. Preto si na obede uložil lyžičku, vidličku, nožík, koreničku a soľničku postupne do bodov L, V, N, K a S. Vytvoril tak z príboru rovnoramenný trojuholník LVN so základňou VN. Body K a S sa nachádzali postupne na stranách LV a LN. Všetko bolo navrhnuté tak, že osi uhlov VKS a KSN sa preťali v bode M, ktorý ležal na základni VN. Nakoniec umiestnil Tomáško do bodu M makovničku. Dokážte, že bod M sa nachádza v strede základne VN.*



Táto úloha sa dala vyriešiť viacero spôsobmi. Napríklad aj na menej ako štyri regulérne riadky:

Uhly KSN a VKS sú vonkajšie uhly trojuholníka LKS. Priesečník ich osí je stred kružnice pripísanej tomuto trojuholníku, podľa zadania je to taktiež bod M. Z definície týmto bodom prechádza aj os uhla KLS. Táto os pretína stranu VN v jej strede, keďže LVN je rovnoramenný. Bod M leží na tejto osi aj na strane VN, ich priesečníkom je stred VN, a teda bod M leží v strede strany VN.

Dalo sa na to samozrejme ísť aj inak. Keď si vyjadríme a doplníme všetky vnútorné uhly, všimneme si, že trojuholníky KVM, KMS a SMN majú rovnaké vnútorné uhly, a sú si teda podobné (pre uhly konkrétne platí, že $|\sphericalangle VKM| = |\sphericalangle MKS| = |\sphericalangle SMN|$, $|\sphericalangle KVM| = |\sphericalangle KMS| = |\sphericalangle MNS|$ a $|\sphericalangle VMK| = |\sphericalangle KSM| = |\sphericalangle MSN|$). Aby to bolo zjavnejšie, môžme si spraviť obrázok len s týmito troma trojuholníkmi, kde strany medzi rovnakými uhlami označíme rovnakým písmenkom.



Teraz už si môžeme zostavovať rovnice od výmyslu sveta. Z toho, že trojuholníky sú si podobné vieme, že platí $y_3/y_2 = x_3/x_2$. Keď sa pozrieme na obrázok, uvidíme, že $z_3 = x_2$ a $y_2 = z_1$. Tak to použijeme a dostaneme $y_3/z_1 = x_3/z_3$. A už si len vyjadríme y_3 ako $y_3 = z_1 x_3/z_3$. Okej, toto si pamätáme, poďme spraviť nejakú inú rovnicu.

Napríklad $x_1/x_3 = z_1/z_3$. Vyjadríme x_1 ako $x_1 = x_3 z_1/z_3$. Stačí sa pozrieť o odsek vyššie vidíme, že $x_1 = y_3$. Tieto dve strany tvoria stranu VN, a keďže sú rovnaké, bod M bude ležať v strede strany VN. Hotovo.

3.5 Keď Musíš Stáť ($\kappa \leq 7$) opravovali **Janka** a **Katka**

Zadanie. *Pred jedálňou je niekoľko vešiakov, ktoré sú očíslované za sebou idúcimi celými kladnými číslami (nemusia začínať jednotkou). Každý vešiak je buď červenej, alebo modrej farby, pričom z každej farby sa tam nachádza aspoň jeden vešiak. Števko čakajúc v rade na obed spočítal súčet najmenšieho spoločného násobku čísel modrých vešiakov a najmenšieho spoločného násobku čísel červených vešiakov. Je možné, že dostal mocninu čísla 2?*

Najmenší spoločný násobok červených čísel si označme c a najmenší spoločný násobok modrých čísel si označme m. Povedzme si, že Števko mohol ako svoj výsledok dostať mocninu dvojky a poďme sa pozrieť, kam sa s týmto predpokladom dostaneme.

Keďže z každej farby je aspoň jeden vešiak, tak vešiaky sú aspoň dva a aspoň jeden z nich má na sebe párne číslo, teda aspoň jedno z čísel m, c je párne. Ich súčet má ale tiež byť párny, preto musia byť párne obe. No a z toho vyplýva, že na vešiakoch máme aspoň dve párne čísla – aspoň jedno pre každú farbu.

Prvočíselný rozklad čísel m a c je tvorený prvočíslami, ktoré sa nachádzajú v prvočíselných rozkladoch modrých a červených čísel a to tak, že každé prvočíslo je umocnené na najväčšiu z mocnín, v ktorej sa nachádza na čísle príslušnej farby. Označme 2^x túto (najvyššiu) mocninu dvojky v čísle m a 2^y najväčšiu mocninu dvojky v čísle c. Súčin všetkých ostatných prvočísel z čísla m je nepárny a označíme ho k. Analogicky zadefinujeme l pre červené čísla. Vieme teda, že $m = 2^x \cdot k$ a $c = 2^y \cdot l$.

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $x \geq y$. Súčet $m + c$ teda môžeme zapísať ako

$$m + c = 2^x \cdot k \; + 2^y \cdot l = 2^y \cdot \left(2^{x-y} \cdot k \; + l\right).$$

Aby tento súčet mohol byť mocninou dvojky, musí byť výraz v zátvorke párny. To je ale problém, lebo ak $x > y$, je to súčet párneho a nepárneho čísla, teda je nepárny.

Aby sme tomuto problému zabránili, potrebujeme aby platilo $x = y$ (výraz v zátvorke by bol v takomto prípade párny). To znamená, že v postupnosti po sebe idúcich čísel na vešiakoch existujú aspoň dve čísla, ktoré majú rovnaký (a v danej postupnosti najväčší) exponent pri dvojke. tieto čísla sa dajú vyjadriť ako $2^x \cdot a$ a $2^x \cdot (a+1)$ (keďže je naša postupnosť súvislá, musia byť čísla, ktorými násobíme najvyššie mocniny dvojky po sebe idúce). Lenže z čísel a a $a+1$ je práve jedno párne, teda dvojka sa v prvočíselnom rozklade jedného z čísel $2^x \cdot a$, $2^x \cdot (a+1)$ vyskytuje o jeden krát viac. To ale nesedí s tým, ako sme si zvolili číslo x. Medzi za sebou idúcimi číslami teda nemôžu existovať dve čísla s najvyššou mocninou dvojky (nemôže platiť, že $x = y$). Predpoklad, že Števkov výsledok bol mocninou dvojky teda musí byť nesprávny.

Števko preto nemohol sčítaním najmenšieho spoločného násobku modrých čísel a najmenšieho spoločného násobku červených čísel dostať mocninu dvojky.

3.6 Kaša Musí Stuhnúť

opravoval **Marek**

Zadanie. *Do cesta ide l lásky, d droždia a o univerzálnej hnedej omáčky, kde l, d, o sú rôzne nezáporné reálne čísla. Cesto je tuhé, ak platí*

$$\frac{l^2}{(d-o)^2}+\frac{d^2}{(o-l)^2}+\frac{o^2}{(l-d)^2}>2.$$

Dokážte, že cesto bude tuhé vždy bez ohľadu na použité množstvo surovín.

Potrebujeme ukázať, že nerovnosť platí. Na to si oprášime zopár známych vecí. Pre novších riešiteľov možno neznámych, preto ukážeme, aj ako sa dokazujú takéto veci. Budeme potrebovať nerovnosť $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ pre kladné reálne čísla x, y a symetrickosť výrazu. Nerovnosť si dokážeme na začiatok, aby sme potom v dôkaze nemuseli robiť odbočku.

Nezápornosť štvorca $(x-y)^2\geq 0$ prevedieme na tvar $x^2+y^2\geq 2xy$. Keďže x, y sú kladné, môžme predeliť nerovnosť výrazom xy a dostaneme požadovanú nerovnosť $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$. Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x=y$. Keďže v našej úlohe sú všetky neznáme rôzne, môžme povedať, že $x\neq y$ preto môžme písať ďalej už len „>".

Ďalej si ukážeme, že ľavá strana nerovnosti je symetrická. To je taká vlastnosť, že keď trojicu (l,d,o) vymeníme za trojicu (l,o,d), (o,d,l) alebo (d,l,o), dostaneme taký istý výraz. Ak dosadíme trojicu (l,o,d), dostaneme na pravej strane výraz

$$\frac{l^2}{(o-d)^2}+\frac{o^2}{(l-d)^2}+\frac{d^2}{(l-o)^2}=\frac{l^2}{(d-o)^2}+\frac{d^2}{(o-l)^2}+\frac{o^2}{(l-d)^2},$$

ktorý je totožný s pôvodným výrazom na pravej strane. Ostatné rovnosti ukážeme analogicky. Čo sa týka pravej strany, tá je zjavne symetrická. Naša nerovnosť je teda symetrická. Jednou z vlastností symetrických výrazov je napríklad to, že môžeme usporiadať neznáme podľa veľkosti. Bez ujmy na všeobecnosti môžme povedať, že $l>d>o\geq 0$.

Dobrým začiatkom je ukázať si nerovnosť pre nejaký špeciálny prípad. Preto si najprv ukážeme, že nerovnosť platí pre $o=0$.

$$\frac{l^2}{(d-0)^2}+\frac{d^2}{(0-l)^2}+\frac{0^2}{(l-d)^2}=\frac{l^2}{d^2}+\frac{d^2}{l^2}>2$$

Poslednú nerovnosť máme už ukázanú, nakoľko l^2 a d^2 sú rôzne kladné reálne čísla.

Teraz potrebujeme ukázať, že nerovnosť platí pre $o>0$. Preto potrebujeme upraviť naše zlomky, aby sa začali podobať tomu, čo máme ukázať. Zoberme si kladné reálne čísla x, y a c kde $x>y>c$ a zamyslime sa nad nasledujúcou nerovnosťou:

$$2<\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\leq\frac{(x+c)^2}{(y-c)^2}+\frac{(y+c)^2}{(c-x)^2}$$

O prvej vieme, že platí, a o druhej vieme postupne povedať, že

$$\frac{x^2}{y^2}\leq\frac{(x+c)^2}{y^2}\leq\frac{(x+c)^2}{(y-c)^2}$$

a potom podobná nerovnosť platí aj pre zlomok y^2/x^2 aj pre druhý zlomok.

Teraz už len prepísať nerovnosť tak, aby vyzerala ako naša. Substitúciami $l=x+c$, $d=y+c$ a potom aj $o=2c$ dostaneme niečo, čo už je veľmi podobné tomu, čo máme dokázať.

$$\frac{l^2}{(d-c-c)^2}+\frac{d^2}{(c+c-l)^2}=\frac{l^2}{(d-2c)^2}+\frac{d^2}{(2c-l)^2}=\frac{l^2}{(d-o)^2}+\frac{d^2}{(o-l)^2}$$

Už len ukázať, že pridaním na ľavú stranu $o^2/(l-d)^2$ rovnosť nenarušíme. Tento výraz je kladný, a teda pripočítaním kladného čísla ku väčšej strane nerovnosť nenarušíme. Naša nerovnosť teda platí.

$$2 < \frac{l^2}{(d-o)^2} + \frac{d^2}{(o-l)^2} \leq \frac{l^2}{(d-o)^2} + \frac{d^2}{(o-l)^2} + \frac{o^2}{(l-d)^2}$$

3.7 Kúp Mac Sebe

opravovali **Juro** a **Pedro**

Zadanie. *Vedúca jedálne si kúpila nový Mac. Avšak v skutočnosti je MAC uhol veľkosti* $30°$ *v trojuholníku ABC s ťažnicou AM. Výška na stranu AC z bodu B pretína stranu AC v bode H. Priamka cez bod M, ktorá je kolmá na priamku AM, pretína polpriamku HB v bode K. Dokážte, že* $|AK| = |BC|$.

Ako prvé si všimnime, že v úlohe máme veľa pravých uhlov – výšku, kolmicu. Aká veta je často vhodná pri pravých uhloch? Tálesova veta, ktorá hovorí, že ak A, B, C sú body na kružnici, kde AC je priemer kružnice, potom uhol ABC je pravý. Pozrime si, ktoré uhly sú pravé a kde môžeme vložiť kružnicu: uhol BHC (lebo výška), AHB (lebo výška), AMK (lebo kolmica).

Podľa Tálesovej vety platí, že body A, H, M, K ležia na kružnici s priemerom AK. Ak si označíme stred AK ako bod S, tak je to iba inými slovami povedané $|SA| = |SK| = |SM| = |SH|$. Pozrime sa teraz zase na další pravý uhol – uhol BHC. Rovnako ako minule, pomocou Tálesovej vety zistíme, že $|MB| = |MC| = |MH|$.

Čo sme ešte nevyužili zo zadania? Vieme, že $|\sphericalangle MAH| = 30°$. V tomto momente sa priamo núka využiť obvodový a stredový uhol. Pretože tieto tri body ležia na jednej kružnici, a keďže MH je tetiva kružnice, platí pre ňu, že obvodový uhol MAH je polovičný oproti stredovému uhlu MSH. Preto $|\sphericalangle MSH| = 60°$.

Načo je nám toto dobré? Prezrime si trojuholník HMS. Ten má dve strany rovnaké a jeden uhol $60°$. Aký trojuholník to musí byť? Správne, rovnostranný.

Tým sa dostávame k riešeniu, pretože keďže rovnostranný trojuholník je známy tým, že má rovnaké strany, platí $|MH| = |MS| = |HS|$. Teraz stačí len skombinovať všetky rovnice a riešenie je na svete:

$$|BC| = |MB| + |MC| = 2 \cdot |MH| = 2 \cdot |SM| = 2 \cdot |SK| = |SK| + |SA| = |AK|.$$

3.8 Kučeravý Maťko Sklerotický

opravoval **Vodka**

Zadanie. *Vodka došiel do jedálne a zabudol tam zadania tohto kola KMS. Kuchárky zaujala najmä úloha 9. Úloha 8 však znie takto: Nájdite všetky funkcie* $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *také, že* $n + f(m)$ *delí* $f(n) + nf(m)$, *pre všetky kladné celé čísla m, n.*

I keď to nie je úplne funkcionálna rovnica, lebo nemáme žiadnu rovnosť :), tak stále máme k dispozícii nejaký vzťah, ktorý platí pre všetky prirodzené čísla m, n. Môžeme preto zvoliť nejaké konkrétne a pozrieť sa, ako vyzerá podmienka pre ne. Pracujeme na prirodzených číslach, a preto, žiaľ, nuly dosadiť nemôžeme. Môžeme však dosadiť $m = n = 1$. Dostávame, že $1 + f(1) \mid 2f(1)$. Z tohto nám vyplýva, že $1 + f(1) \mid 2f(1) - (1 + f(1)) = f(1) - 1$, no keďže zjavne $1 + f(1) > f(1) - 1 \geq 0$, tak na to, aby to platilo, musí byť $f(1) - 1 = 0$. Fajn, vypočítali sme, že $f(1) = 1$.

To by sme chceli nejako využiť, a preto dosadíme $m = 1$ (pretože $n = 1$ by nám už nedalo nič nové). Máme $n + 1 \mid f(n) + n$ $(\diamond)$.

Ok, to vyzerá, že sa môže hodiť, ale zatiaľ nám to nejak veľa nehovorí. Skúsme preto iné dosadenie. Ponúka sa dosadiť $m = n$. Dostávame $n + f(n) \mid f(n) + nf(n)$. My však vieme, že $n + f(n) \mid n^2 + nf(n)$. Po odčítaní týchto dvoch vzťahov máme $n + f(n) \mid n^2 - f(n)$. Môžeme si všimnúť, že keby $n^2 - f(n)$ bolo záporné (t.j. $f(n) > n^2$, tak určite $|n + f(n)| > f(n) > f(n) - n^2 = |n^2 - f(n)|$. To by ale bol spor s našou deliteľnosťou. Preto $f(n) \leq n^2$ $(\heartsuit)$, pre všetky prirodzené n.

Hodnotu $f(1)$ sme už vypočítali. Môžeme sa pozrieť, čo to hovorí pre $f(2)$. Vieme, že $f(2) \leq 4$, takže máme len 4 možnosti. Navyše vieme, že $3 \mid f(2) + 2$. Z týchto dvoch podmienok máme už len dve možnosti: $f(2) = 1$ alebo $f(2) = 4$.

Tak skúsme predpokladať, že $f(2) = 1$ a dosadiť $n = 2$. Dostávame, že $2 + f(m) \mid 1 + 2f(m)$. To vieme upraviť na $2 + f(m) \mid 3$. Avšak $2 + f(m) \geq 3$, tak z toho dostávame, že nutne $f(m) = 1$, pre všetky prirodzené čísla m.

Vidíme, že v prípade $f(2) = 1$ dostávame konštantnú jednotkovú funkciu. Ľahko skúškou overíme, že naozaj vyhovuje.

Ďalej prepokladajme, že $f(2) = 4$. Tu to už bude ťažšie, ale ak skúsime dosadiť ďalšie malé čísla, môžeme prísť na hypotézu, že by mohlo platiť $f(n) = n^2$. Na funkcionálky nad $\mathbb{N}$ je často dobrá indukcia. Skúsme to dokázať indukciou. Prvý krok (pre $n = 1$ a $n = 2$) sme už urobili. Predpokladajme, že $f(k) = k^2$ a dokážme to aj pre $k + 1$.

Urobíme to priamočiaro – proste dosadíme $m = k$ a $n = k + 1$. Dostávame

$$k + 1 + k^2 \mid f(k + 1) + (k + 1)k^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + k + k^2 \mid f(k + 1) + (k + 1)k^2 - k(1 + k + k^2) = f(k + 1) - k.$$

My však vieme z $(\heartsuit)$, že $f(k + 1) \leq (k + 1)^2$. (Vidíte, ako sa zrazu tie zistenia z triviálnych dosadení zídu?) Preto máme len 2 možnosti. Buď $f(k + 1) = k$ alebo $f(k + 1) = k + (1 + k + k^2) = (k + 1)^2$, keďže ďalšie číslo so zvyškom k po delení $(1 + k + k^2)$ by už bolo veľké. No prípad $f(k + 1) = k$ vylúčime tak, že z $(\diamond)$ vieme, že $k + 2 \mid f(k + 1) + k + 1$. A keby $f(k + 1) = k$, tak máme $k + 2 \mid 2k + 1$, čo je ekvivalentné s $k + 2 \mid 3$. A to pre $k \geq 2$ už neplatí, čo je spor. Preto nutne $f(k + 1) = (k + 1)^2$.

To je záver dôkazu indukciou, a preto pre všetky prirodzené čísla platí, že $f(n) = n^2$. Skúškou ľahko overíme, že aj táto funkcia vyhovuje.

Úloha má 2 riešenia, a to $f(n) = 1$ a $f(n) = n^2$.

Iné riešenie

Teraz si ukážeme trocha vyspelejšie riešenie, v ktorom sa nebudeme babrať s dosadzovaním jednotiek a iných malých čísel. Všimnime si, že aj v predošlom riešení, sme deliteľnosť často upravovali na lepší tvar. To môžeme urobiť hneď na začiatku. Vieme, že $n + f(m) \mid f(n) + nf(m)$. Ak od ľavej strany odčítame $n(n + f(m))$, tak dostaneme, že $n + f(m) \mid f(n) - n^2$.

Do tohto vzťahu zase nič nedosadíme, len si uvedomíme, čo nám hovorí. A čo nám hovorí? Nuž, ak zafixujeme n, tak pravá strana sa zafixuje tiež. Ak ak $f(n) - n^2 \neq 0$, tak má len konečný počet deliteľov. To znamená, že $n + f(m)$ môže nadobúdať iba konečný počet hodnôt a preto je nutne $f(m)$ ohraničená.

To celé za predpokladu, že $f(n) \neq n^2$. Lenže my môžeme n zvoliť ľubovoľne, a preto platí, že buď je f ohraničená alebo $f(n) = n^2$ pre všetky n.

Našli sme jedno riešenie a ďalej už môžeme riešiť len prípad, že $f(n) \leq C$, pre všetky n a nejakú konštantu C.

Skúsime teraz vzťah zo zadania upraviť inak:

$$n + f(m) \mid f(n) + nf(m) - f(m)(n + f(m)) = f(n) - f(m)^2.$$

No my vieme, že f je ohraničená, preto celá pravá strana je ohraničená. Avšak ľavá strana ohraničená nie je. Ak teda zvolíme dostatočne veľké n, napr. $n = n_0 = C^2 + 47$, tak určite bude platiť, že $|n_0 + f(m)| > |f(n_0) - f(m)^2|$, a teda nutne $f(n_0) - f(m)^2 = 0$. Toto platí pre všetky m, a preto f je konštanta. Navyše to platí aj pre $m = n_0$, a preto vieme dopočítať, že táto konštanta je rovná 1.

Zistili sme, že ak je f ohraničená, tak nutne $f(n) = 1$ pre všetky n. A samozrejme ešte tak isto ako v predošlom riešení, treba urobiť skúšku pre obidve nájdené riešenia.

Komentár

Vieme, že $a \mid b$ z definície vtedy, ak existuje celé číslo k také, že $ak = b$. Avšak používať toto k na nejaké dôkazy skoro nikdy nie je na nič dobré (OK, ak robíte Vieta jumping, tak sa hodí). Z deliteľnosťami sa dá dobre, ľahšie a efektívnejšie manipulovať bez pomoci tohto k odčítaním nejakých násobkov ľavej strany k pravej, tak ako to bolo robené veľakrát vo vzorovom riešení. Preto vám odporúčam, aby ste ho do budúcna nepoužívali. Je to zhruba taká rada, ako to, že si do geometrického obrázka NEkreslite stred kružnice, pokiaľ nie je zadaný.

A ak túto radu nedodržíte a použijete ho, tak určite nemôžete predpokladať, že k je rovnaké pre všetky možné deliteľnosti :). (Ak sa pri tomto smejete, tak vedzte, že takúto chybu urobila veľká časť z vás.)

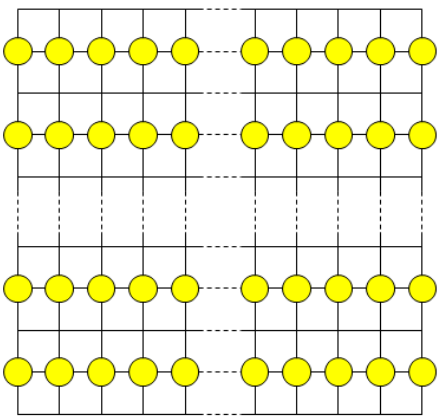
3.9 Kuchárky Montujú Svetlá

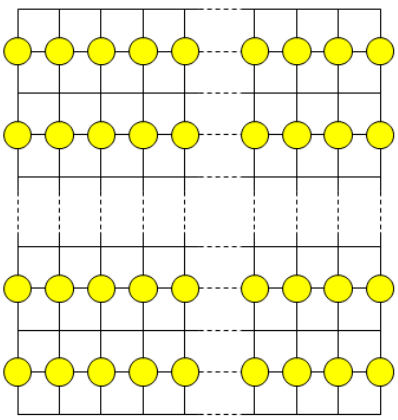
opravoval **Jožo**

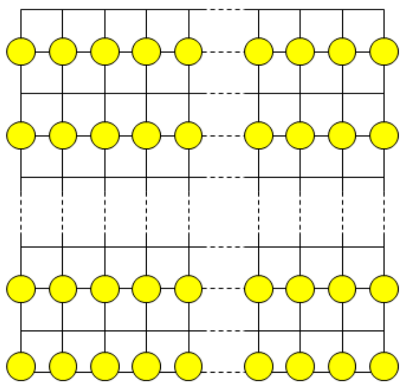
Zadanie. *Tuto je spomínaná úloha, čo zaujala kuchárky. Vďaka nej totiž môžu zoptimalizovať osvetlenie v jedálni. Linoleum na podlahe jedálne tvorí štvorčekovú mriežku $m \times n$ štvorčekov. V každom štvorčeku sa nachádza jeden stôl. Osvetlenie jedálne zabezpečujú lampy, ktoré sa nachádzajú v niektorých mrežových bodoch mriežky (vrátane tých na obvode, všetkých mrežových bodov je teda $(m+1)(n+1)$). Každá lampa osvetľuje stoly na tých štvorčekoch, v ktorých rohoch sa nachádza. V závislosti od prirodzených čísel m, n nájdite najmenší počet lámp potrebný na to, aby každý stôl bol osvetlený aspoň dvomi lampami.*

Toto je jedna z úloh, kde prísť na správny výsledok je jednoduché. Stačí si nakresliť zopár jedální a pohrať sa s lampami. Podstatne zložitejšie je ukázať, prečo menej lámp nestačí. Preto rovno na začiatok odbavíme tú ľahšiu časť. Uvedieme najmenší počet lámp potrebný na osvetlenie jedálne a ukážeme, akým rozmiestnením lámp ho môžeme dosiahnuť.

- Ak sú m, n párne, pričom $m \leq n$, tak nám stačí $m(n+1)/2$ lámp. Lamy umiestnime ako na obrázku a.
- Ak je m párne a n nepárne, tak nám stačí $m(n+1)/2$ lámp. Umiestnime ich ako na obrázku b.
- Ak sú m, n nepárne, tak nám stačí $(m+1)(n+1)/2$ lámp. Umiestnime ich ako na obrázku c.


(a)

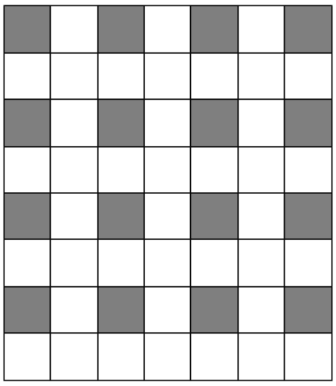

(b)


(c)

Teraz sa môžeme pustiť do dokazovania, prečo sú toto najmenšie počty lámp. Budeme sa snažiť ukázať, že na osvetlenie jedálne potrebujeme aspoň x lámp, t. j. hľadať *dolný odhad* počtu lámp. Keď sa s dolným odhadom dostaneme k spomenutým počtom lámp, ukážeme, že spomenuté počty sú najmenšie možné. Pre lepšie vyjadrovanie si očíslujeme riadky číslami 1 až m a stĺpce číslami 1 až n. Políčko, ktoré sa nachádza v r-tom riadku a s-tom stĺpci, budeme označovať ako políčko (r, s). Rozmyslite si, ako by ste opísali vyššie spomenuté rozmiestnenia lámp pomocou týchto označení, bez použitia obrázkov.

Ak sa pozrieme na jedno políčko, tak aby sme ho osvetlili, potrebujeme aspoň dve lampy. Koľko lámp potrebujeme na osvetlenie dvoch políčok? Ak majú spoločnú stranu, tak stále to sú dve lampy. Ak si však zoberieme dve políčka, ktoré nemajú žiaden spoločný vrchol, tak na ne potrebujeme až štyri lampy. Tu vidíme, že pomocou takýchto nesusedných políčok vieme získať celkom pekné dolné odhady. Koľko najviac takých políčok vieme v jedálni $m \times n$ políčok nájsť?

Zoberme si políčka, ktoré sa nachádzajú v nepárnom riadku a zároveň nepárnom stĺpci (pozri obrázok). Takýchto políčok je $\lceil m/2 \rceil \lceil n/2 \rceil$.[1] Každá lampa osvetlí najviac jedno z vybraných políčok. Preto na osvetlenie vybraných políčok potrebujeme aspoň $2\lceil m/2 \rceil \lceil n/2 \rceil$. Ak sa pozrieme na naše výsledky, tak v prípade, keď aspoň jedno z čísel m, n je nepárne, tak tento počet lámp vieme dosiahnuť. Ostáva nám teda prípad, kedy sú m aj n párne.



Užitočným spôsobom dokazovania (a teda aj dokazovania dolných odhadov) je matematická indukcia. Jej princípom je, že jedáleň zmenšíme a z indukčného predpokladu budeme vedieť minimálny počet lámp potrebný na osvetlenie menšej časti. Kľúčovou vecou je určiť, ako máme jedáleň zmenšiť. Totiž priamočiare nápady, ako napr. odstrániť jeden či dva rady stolov, nefungujú. Potrebujeme vymyslieť rafinovanejší spôsob. Tým bude, že odrežeme dva riadky aj dva stĺpce.

Čo však s tým, že máme dve premenné? V matematickej indukcii môžeme využívať len jednu. S tým sa dá popasovať rôznymi spôsobmi. Prvou možnosťou je robiť indukciu podľa jednej premennej, napr. m, a na druhú premennú n sa dívať ako na parameter, ktorý môže nadobúdať ľubovoľnú hodnotu. Druhou možnosťou, je použiť novú premennú, do ktorej tieto dve premenné m, n zabalíme. Štandardný spôsob je robiť indukciu podľa $s = m + n$. Okrem toho sa dá vymyslieť ešte plno ďalších nápadov. Podstatou je nejako si zoradiť jedálne podľa veľkosti a výsledok pre väčšiu jedáleň odvodiť z výsledkov pre menšie jedálne. My použijeme prvý spôsob. Poďme teda našu indukciu riadne zapísať.

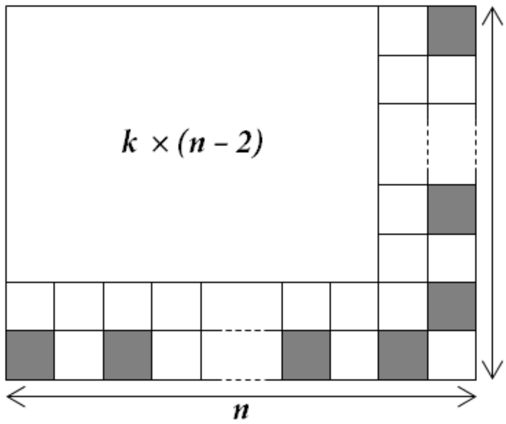
Dokážeme, že na osvetlenie jedálne rozmerov $m \times n$, kde m, n sú ľubovoľné nezáporné párne čísla také, že $m \leq n$, potrebujeme aspoň $m(n+1)/2$ lámp. To ukážeme matematickou indukciou podľa m.

[1] Zápis $\lceil x \rceil$ označuje hornú celú časť reálneho čísla x. Je to najmenšie celé číslo, ktoré je aspoň tak veľké ako x. V kladných číslach sa dá interpretovať ako zaokrúhlenie nahor na celé číslo. Pomocou tohto šikovného zápisu vieme takéto výsledky zapísať jednotne bez toho, aby sme museli rozlišovať paritu čísel m, n.

Ak $m = 0$ a n je ľubovoľné nezáporné celé číslo, tak potrebujeme aspoň 0 lámp, teda pre $m = 0$ dokazované tvrdenie platí.

Predpokladajme, že pre $m = k$, kde k je nezáporné párne číslo, a ľubovoľné nezáporné celé párne číslo l potrebujeme na osvetlenie jedálne rozmerov $k \times l$ aspoň $k(l+1)/2$ lámp. Uvažujme teraz jedáleň rozmerov $(k+2) \times n$ (pre ľubovoľné párne $n \geq k+2$). Teraz potrebujeme ukázať, že na osvetlenie takejto jedálne potrebujeme aspoň $(k+2)(n+1)/2$ lámp.

V posledom riadku jedálne zafarbíme políčko v každom nepárnom stĺpci a v poslednom stĺpci zafarbíme políčko v každom nepárnom riadku (pozri obrázok). Takto sme zafarbili $(k+2)/2 + n/2$ políčok. Iba jedna lampa osvetlí dve zafarbené políčka, a to lampa na spoločnom rohu políčok $(k+2, n-1)$ a $(k+1, n)$. Okrem nej každá lampa osvetlí najviac jedno zafarbené políčko. Preto na osvetlenie zafarbených políčok potrebujeme aspoň $2((k+2)/2 + n/2) - 1 = k + n + 1$ lámp.



Zoberme si časť jedálne tvorenú celou jedálňou bez posledných dvoch riadkov a bez posledných dvoch stĺpcov. Ide teda o časť jedálne rozmerov $k \times (n-2)$. Preto podľa nášho indukčného predpokladu na osvetlenie tejto časti potrebujeme aspoň $k(n-2+1)/2$ lámp. Položili sme pritom $l = n-2$, čo je vďaka tomu, že $n \geq m = k+2 \geq 2$ naozaj nezáporné celé párne číslo. Žiadna z týchto lámp neosvetlí zafarbené políčko. Preto na osvetlenie celej jedálne $(k+2) \times n$ potrebujeme aspoň

$$\frac{k(n-1)}{2} + \frac{2k+2n}{2} = \frac{kn - k + 2k + 2n}{2} + 1 = \frac{k(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(k+2)(n+1)}{2}$$

lámp. To je presne to, čo sme chceli ukázať. Náš dôkaz matematickou indukciou je hotový. Teda na osvetlenie jedálne párnych rozmerov $m \times n$ potrebujeme aspoň $m(n+1)/2$ lámp. Tým sme dokázali všetky potrebné dolné odhady.

Na záver tohto riešenia ešte poukážeme na pre niekoho neštandardný spôsob prvého kroku indukcie. Človek by typicky čakal za prvý krok zobrať jedáleň rozmerov $2 \times n$. To, samozrejme, kľudne môžeme spraviť a následne nahradiť všade nezáporné čísla kladnými. Avšak matematici sú lenivé tvory a robili by tým prácu navyše. Ukázať dokazované tvrdenie pre $m = 2$ sa dá tak isto, ako opisujeme dôkaz pre jedáleň $(k+2) \times n$. Preto nie je potrebné to písať dvakrát a vieme to takto elegantne obísť. Ak však máte problémy sa s tým zmieriť, odporúčame vám vo svojich riešeniach neexperimentovať a radšej za prvý krok zobrať $m = 2$.

3.10 Kečupová Maľba Snov

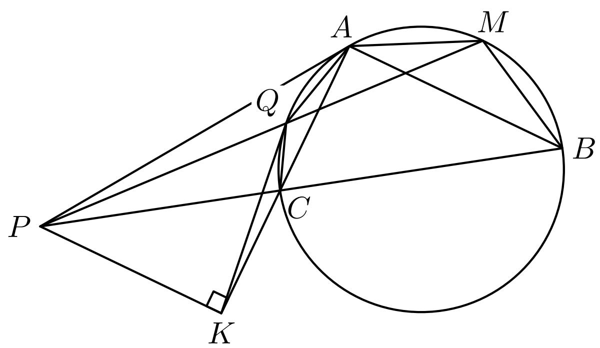
opravoval **Zajo**

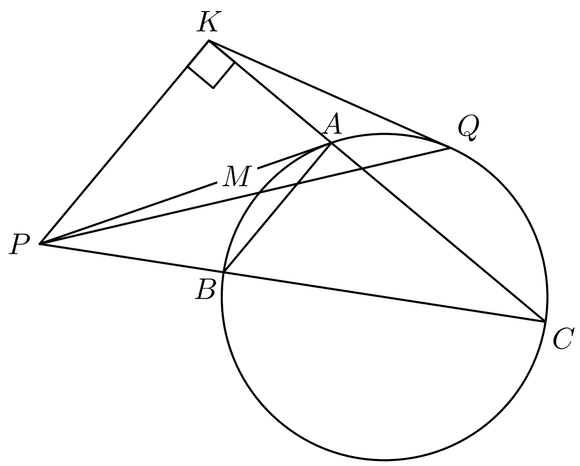
Zadanie. *V jedálni urobili tety kuchárky langoše. Kuchárka Betka sa oduševnene pustila do kečupomaľby langoša. Najprv do kružnice l, ktorá ohraničuje langoš, vpísala trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole A. Ďalej* *urobila dotyčnicu ku kružnici l v bode A, ktorá pretľala priamku BC v bode P. Stred kratšieho oblúka AB kružnice l označila ako M. Pokračovala priamkou PM, ktorá druhýkrát pretľala kružnicu l v bode Q. Svoje umenie zakončila dotyčnicou ku kružnici l v bode Q, ktorá pretľala priamku AC v bode K. Síce plno kečupu skončilo mimo taniera, ale Betka vie, že jej umelecké dielo je to pravé. Dokážte, že uhol PKC je pravý.*

Pri geometrií je užitočné si povedať, čo sa vlastne budeme snažiť dokázať. Celý obrázok pôsobí tak, že $\triangle PKC$ a $\triangle BAC$ by mohli byť rovnoľahlé podľa stredu C. Ak by boli rovnoľahlé, tak aj pri bode K by bol pravý uhol a preto hľadaný $\sphericalangle PKC$ by bol pravý.

Na riešenie tejto úlohy využijeme more podobných trojuholníkov a pomerov, ktoré platia medzi ich dĺžkami strán. Za inšpiráciu k tomuto riešeniu ďakujeme *Majovi Poturnayovi*. Odporúčaný spôsob čítania je zadívať sa na náčrt, postupne si overiť, že všetky uvedené vzťahy platia a nakoniec si užiť zlepenú skladačku.

V úlohe sú možné dve konfigurácie, prvá keď bod P leží na polpriamke BC (prípad, ktorý uvedieme) a druhá, keď bod P leží na polpriamke CB. Druhú konfiguráciu je možné vyriešiť úpravou tohto postupu (iné trojuholníky budú podobné a iné uhly sa budú rovnať), ktorú odporúčame si rozmysliet. Na obrázkoch uvádzame obe.





Všimnime si štvoricu bodov P, C, A, B. Tvorí typickú konfiguráciu pre použitie mocnosti. Môžeme si ale všimnúť aj úsekový uhol $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle PAC|$. Uhol pri vrchole P tvorí spolu s uvedeným úsekovým uhlom dva uhly, ktoré sú rovnaké v $\triangle PCA$, $\triangle PAB$ (1). Tieto dva trojuholníky sú preto podobné. V rovnakej konfigurácii sú v úlohe aj dvojice: $\triangle PQA$, $\triangle PAM$ (2) a $\triangle KCQ$, $\triangle KQA$ (3). Pripravme si ešte poslednú dvojicu podobných trojuholníkov: $\triangle PCQ$, $\triangle PMB$ (4). V tomto prípade $|\sphericalangle PQC| = 180° - |\sphericalangle CQM| = |\sphericalangle CBM|$ (posledná rovnosť vyplýva z toho, že $CQMB$ je tetivový štvoruholník). Okrem toho oba trojuholníky majú spoločný uhol pri vrchole P, čím je podobnosť dokázaná.

Aby boli $\triangle PKC$ a $\triangle BAC$ rovnoľahlé, musí platiť:

$$\frac{|KC|}{|KA|} = \frac{|PC|}{|PB|}$$

(Možno ste sa stretli s priamou definíciou rovnoľahlosti, kedy by sme tvrdili, že $|KC|/|CA| = |PC|/|CB|$, nie je však ťažké si rozmyslieť, že uvedená rovnosť je s ňou ekvivalentná. Stačí si rozpísať dlhšie strany ako súčet menších častí a rovnicu upraviť.)

Upravujme postupne ľavú stranu. Vystupujú v nej body ako v (3), odkiaľ vieme (dve rovnice následne vynásobíme):

$$\frac{|KC|}{|KQ|} = \frac{|QC|}{|AQ|}, \qquad \frac{|KQ|}{|KA|} = \frac{|QC|}{|AQ|} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{|KC|}{|KA|} = \left(\frac{|QC|}{|AQ|}\right)^2$$

Postupne zo (4) a (2) vieme:

$$\frac{|QC|}{|PQ|} = \frac{|MB|}{|PB|}, \qquad \frac{|AQ|}{|PQ|} = \frac{|MA|}{|PA|} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{|QC|}{|AQ|} = \frac{|MB|}{|MA|} \cdot \frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PA|}{|PB|}$$

Dve rovnice sme vydelili a využili sme, že $|MA| = |MB|$, lebo M je stred oblúka.

Použitím (1), triviálne platného tvrdenia a ich vynásobením dostaneme:

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PC|}{|PA|}, \qquad \frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PA|}{|PB|} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{|PA|}{|PB|}\right)^2 = \frac{|PC|}{|PB|}$$

Ostáva nám zložiť jednotlivé závery a tešiť sa:

$$\frac{|KC|}{|KA|} = \left(\frac{|QC|}{|AQ|}\right)^2 = \left(\frac{|PA|}{|PB|}\right)^2 = \frac{|PC|}{|PB|}$$