Trojsten

Korešpondenčný matematický seminár
XXXIX. ročník, 2017/2018
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 1. kola letnej časti

1.1 Kúsok Modifikovaný Symbol ($\kappa \leq 1$) opravovali **Ivka** a **Kika**

Zadanie. *Harry je fanúšik Harryho Pottera a prial si pod stromček symbol darov smrti. Pod stromčekom si našiel rovnostranný trojuholník ABC s vpísanou kružnicou k a rovnostranný trojuholník DEF, ktorého opísaná kružnica je tiež kružnica k. Harry bol smutný, lebo takto nevyzerá symbol darov smrti. No aspoň môže porovnať obsahy trojuholníkov. Zistite, koľkokrát je obsah trojuholníka ABC väčší ako obsah trojuholníka DEF.*

Trojuholník ABC je rovnostranný a vieme, že v rovnostranných trojuholníkoch sú ťažnice a výšky na jednotlivé strany totožné a ležia na osiach uhlov a aj osiach strán. Priesečník výšok (ortocentrum), ťažisko, priesečník osí uhlov a osí strán je jeden bod. Stred kružnice vpísanej trojuholníku sa nachádza na priesečníku osí uhlov (pretože os uhla je množina bodov, ktoré majú od ramien uhla rovnakú vzdialenosť). Dotykové body sú priesečníky strán a kolmíc zo stredu vpísanej kružnice na jednotlivé strany. V prípade rovnostranného trojuholníka sú týmito kolmicami kolmica výšky, ťažnice, … Dotykové body sú v tomto prípade stredy strán.

Keď tieto 3 dotykové body spojíme, vznikne nám tak trojuholník, ktorému je daná vpísaná kružnica trojuholníku *ABC* opísanou kružnicou. Teda trojuholník *DEF* zo zadania. O ňom vieme, že jeho vrcholy ležia v stredoch strán trojuholníka *ABC* a teda sú strednými priečkami. Stredné priečky rozdelia trojuholník *ABC* na 4 zhodné trojuholníky a dĺžka každej z nich je polovicou dĺžky strany trojuholníka *ABC*.

Vzhľadom na to, že trojuholník *DEF* je jedným zo 4 zhodných trojuholníkov vypĺňajúcich trojuholník *ABC*, je jeho obsah jednou štvrtinou obsahu trojuholníka *ABC*.

1.2 Kosáka Mučí Sudosť ($\kappa \leq 2$) opravovala **Kika**

Zadanie. *Pán Kosák nemá rád párne čísla, preto kúpil svojim deťom pod stromček rastúcu postupnosť*

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 31,\ 33,\ \ldots,$$

ktorá obsahuje všetky kladné celé čísla zložené len z nepárnych cifier. Nájdite 2018. *člen tejto postupnosti.*

Poďme zistiť koľko cifier bude mať 2018. člen. Jednociferných členov v postupnosti je 5 a sú to práve nepárne cifry, teda: 1, 3, 5, 7 a 9. Dvojciferných členov je $25 = 5^2$, pretože na mieste prvej cifry môže byť 5 rôznych číslic a taktiež na mieste druhej cifry ich môže byť 5 rôznych. Trojciferných členov je $125 = 5^3$, štvorciferných členov je $625 = 5^4$, päťciferných členov je $3125 = 5^5$. Vieme ľahko dopočítať, že členov, ktoré majú najviac štyri cifry je spolu 780 a členov, ktoré majú najviac päť cifier je 3905. Z toho ľahko vidno, že 2018. člen musí byť päťciferný.

Tak a teraz nájdeme jeho jednotlivé cifry. Koľko je takých päťciferných členov, ktoré začínajú 1? Pre každú zo zvyšných štyroch cifier máme 5 možností, teda takýchto členov je 625. Teda 19999 musí byť $780 + 625 = 1405$. člen postupnosti. Podobne členov začínajúcich 3 je tiež 625 a 39999 je $780 + 625 + 625 = 2030$. člen postupnosti. To sme už za 2018. členom. Jedna možnosť ako ho nájsť, je ísť od 39999 (2030. člen) o dvanásť členov späť (na 2018. člen). Kľudne si tie členy vypíšme: 39 999, 39 997, 39 995, 39 993, 39 991, 39 979, 39 977, 39 975, 39 973, 39 971, 3
Vidíme, že o 12 členov naspäť od 39999 je 39955, a to je náš hľadaný 2018. člen.

Iné riešenie

Vieme ísť na to aj trochu inak. Keďže hľadáme 2018. člen a vieme, že je päťciferný, tak zistime koľký päťciferný člen to je. Takých členov, ktorý majú menej ako päť cifier je 780, teda to musí byť $2018 - 780 = 1238$. člen. Členov začínajúcich každou z možných cifier je 625. Potom podielom $1238 : 625 = 1$ zv. 613 vieme zistiť, že prvá cifra musí byť 3. Je to tak, pretože vidíme, že 1238. je v druhej 625-tici. Prvá 625-tica sú tie, ktoré začínajú cifrou 1, druhá 625-tica sú tie, čo začínajú cifrou 3. V skutočnosti z toho vieme vyčítať ešte viac a dokonca, že je to 613. člen v tejto 625-tici, ktorá začína cifrou 3. Poďme zistiť ďalšiu cifru. Trojciferných členov je 125. Spravme podiel $613 : 125 = 4$ zv. 113. Vidíme, že chceme byť v piatej 125-tici. Teda druhá cifra musí byť 9. Ďalej $113 : 25 = 4$ zv. 13. Ďalšia cifra je tiež 9. $13 : 5 = 2$ zv. 3. ďalšia cifra je 5. $3 : 1 = 3$, čím dostávame, že posledná cifra je tiež tretia najmenšia možná a je to konkrétne 5. Náš hľadaný 2018. člen je 39955.

Iné riešenie

Môžme ísť aj od začiatku inak. Preveďme si číslo 2018 do päťkovej sústavy. Je to 31 033. Čo znamená, že $2018 = 3 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0$. Avšak pozor, nemôžme si povedať, že nech je 1 ako 0 v päťkovej sústave, nech je 3 ako 1 v päťkovej sústave, … Vidieť to môžme ľahko na tomto príklade: číslo 012, resp. 12 v päťkovej sústave by sme reprezentovali ako 135, resp. ako 35, čo sú zjavne dva rôzne členy postupnosti. Ale číslo 2018 môžme zapísať aj inak, bez toho aby sme tam nejakú mocninu čísla 5 mali 0-krát. Zoberieme ju radšej 5-krát a tú ďalšiu väčšiu zoberieme o 1 menej krát. Potom číslo $2018 = 2 \cdot 5^4 + 5 \cdot 5^3 + 5 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0$. Tým máme takú modifikovanú päťkovú sústavu s ciframi 1, 2, 3, 4 a 5. Tu však celkom spokojne môžeme 1 previesť na 1, 2 previesť na 3, 3 previesť na 5, 4 previesť na 7 a 5 previesť na 9. Číslo 25 533 v tejto modifikovanej päťkovej sústave je po prevedení na členy postupnosti 39 955.

1.3 Koľko Medovníkov Spapáš? ($\kappa \leq 3$)

opravoval **Dominik**

Zadanie. *Všeobecný slovenský chudobný študent chcel kúpiť svojim malým súrodencom Adamovi a Eve hru. Nemal však veľa peňazí, tak im len vytlačil pravidlá. Na začiatku hry je na papieri napísaná postupnosť čísel* 1, 2, 3, 4, …, 19, 20. *Hru začína Adam a následne sa strieda s Evou v ťahoch. Hráč vo svojom ťahu umiestni znamienko + alebo − pred niektoré číslo, ktoré ešte nemá znamienko. Keď už všetkých* 20 *čísel má znamienko, hra končí. Potom Eva zje toľko medovníkov, aká je absolútna hodnota súčtu čísel na papieri.*

Eva chce zjesť čo najviac medovníkov a Adam chce, aby ich Eva zjedla čo najmenej. Nájdite najlepšiu stratégiu pre Adama a najlepšiu stratégiu pre Evu.[1] *Koľko medovníkov spapá Eva, ak ona aj Adam budú hrať podľa svojich najlepších stratégií?*

Úlohy, kde hľadáme optimálnu stratégiu pre dvoch je potrebné zvyčajne riešiť tak, že výsledok dokážeme ohraničiť zhora aj zdola. V našom prípade to znamená ukázať, že Eva vie za akýchkoľvek podmienok zjesť aspoň n medovníkov a tiež to, že Adam dokáže za akýchkoľvek podmienok hrať tak, aby ich viac nebolo. Je tiež dôležité si uvedomiť, že ak je nejaká stratégia najlepšou v každom momente hry, nemusí to znamenať, že je najlepšia aj pre celú hru.

V prvej časti ukážeme, že Eva zje vždy aspoň 30 medovníkov. Prečo? Vezmime si čísla od 1 do 20 a rozdeľme ich do dvojíc tak, že 1 a 2 sú spolu, 3 a 4 atď. Keďže Adam začína, musí vybrať nejaké číslo a dať mu znamienko. Eva následne vyberie číslo, s ktorým je Adamovo číslo vo dvojici a priradí mu opačné znamienko. Jedinou výnimkou je dvojica 19, 20, v tejto dá Eva rovnaké znamienko obom číslam. Čo tým dosiahne? 19 a 20 jej dajú v absolútnej hodnote 39, vo zvyšných deviatich dvojiciach nám určite vznikne v súčte číslo medzi −9 a 9.

[1] Najlepšia stratégia pre Evu je taká stratégia, ktorou vie Eva zaručiť, že zje aspoň m medovníkov bez ohľadu na to, ako hraje Adam. Navyše, m je najväčšie možné. Obdobne, najlepšia stratégia pre Adama je taká stratégia, ktorou vie Adam zaručiť, že Eva zje nanajvýš n medovníkov bez ohľadu na to, ako ona hraje. Navyše, n je najmenšie možné.

Adam samozrejme môže prideliť 19-ke alebo 20-ke opačné znamienko ako má súčet zvyšných 9 dvojíc, z čoho vyplýva, že hodnota zmení znamienko. Eva teda zje určite aspoň $39 - 9 = 30$ medovníkov.

Teraz nám ešte treba ukázať, že Adam má stratégiu, ktorá nedovolí Eve zjesť viac ako 30 medovníkov. Adam najprv priradí číslu 20 znamienko + a rozdelí si čísla od 2 po 19 do dvojíc. Veľmi podobnými spôsobom, ako je hore uvedené, v nich vie dosiahnuť $+1$ alebo -1 (zapíšeme to ako ± 1). Avšak len dokým Eva nepoužije číslo 1. Ak sa to stane skôr ako na konci, vyberie najväčšie nepoužité číslo a tomu dá znamienko $-$. Následne bude čakať, či mu Eva túto jeho dvojicu doplní. Ak nedoplní, doplní on dvojicu, ktorú týmto ťahom Eva načala a v nej tak do súčtu dostane ± 1. Eva môže jeho dvojicu doplniť opačným znamienkom, čo jej ale nepomôže (± 1), alebo rovnakým. Ak Eva jeho dvojicu doplní, musí Adam otvárať ďalšiu dvojicu. Vyberie si najvyššie nepoužité číslo a použije znamienko opačné k tomu, aké použil naposledy, keď otváral novú dvojicu. Súčet v novej dvojici je vždy v absolútnej hodnote menší ako v predošlej dvojici s rovnakými znamienkami, z čoho vyplýva, že súčet všetkých čísel v dvojiciach s rovnakými znamienkami bude stále medzi -37 a 0. Pozrime sa teraz, aký bude pri Adamovej stratégii celkový súčet:

- za dvojicu 1, 20 máme do súčtu buď 19 alebo 21, podľa toho, či je pri 1-ke + alebo $-$;
- za dvojice s rôznymi znamienkami číslo medzi -9 a 9;
- za dvojice s rovnakými znamienkami dostaneme vždy záporné číslo medzi -37 a 0.

Z toho vyplýva, že hodnota súčtu bude vždy medzi $21 + 9 + 0 = 30$ a $20 - 1 - 9 - 37 = -27$, teda absolútna hodnota bude menšia alebo rovná ako 30. Čo bolo treba dokázať.

Z vyššie uvedených poznatkov vyplýva, že v prípade, že obaja hrajú najlepšie ako vedia, Eva zje 30 medovníkov.

Druhá časť inak: Adamova stratégia bude tentoraz iná: Vyberie vždy najvyššie nepoužité číslo a dá mu znamienko opačné, ako má doterajší súčet, ak je súčet 0, bude to +. Prečo takáto taktika funguje? Podľa taktiky Adam začne +20-kou. Rozdeľme si ťahy na jednotlivé kolá. Nech i-te kolo je to, v ktorom sa naposledy zmení znamienko(alebo je nulové) celkového súčtu. V prvých $i-1$ ťahoch sme už určite využili čísla $20, \cdots, 20-(i-2)$. V i-tom páre môžeme teda pridať do absolútnej hodnoty $20 - (i - 1) + 20 - i = 41 - i$. Vieme tiež, že predtým bol súčet opačného znamienka alebo nulový, teda po i-tom ťahu bude súčet maximálne $41 - i$. Vo zvyšných $10 - i$ kolách však hodnota bude už len klesať(Adam vždy vezme najvyššie číslo a to je opačného znamienka ako Evino číslo) a to aspoň o jedna. Na konci teda súčet bude nanajvýš $(41 - i) - 10 = 31 - i \leq 30$.

1.4 Kritérium Množstva Sladkostí ($\kappa \leq 4$) opravoval **Adam**

Zadanie. *Niektoré deti dostávajú darčeky podľa toho, ako boli dobré. V rodine Racionálnych však dostáva ich synček Racko darčeky podľa počtu racionálnych čísel. Najprv dostane od rodičov tabuľku 50×50. Potom Racko označí jej riadky číslami $a_1, a_2, \ldots, a_{50}$ a stĺpce číslami $b_1, b_2, \ldots, b_{50}$, pričom týchto 100 čísel je navzájom rôznych a práve 50 z týchto 100 čísel je racionálnych. Potom umiestni do políčka v i-tom riadku a j-tom stĺpci číslo $a_i + b_j$. Racko dostane pod stromček darček za každé racionálne číslo v tabuľke. Zistite, koľko najviac darčekov môže Racko dostať pod stromček.*

Prvá vec, ktorá nás napadne, je fakt, že ak Racko píše do tabuľky práve 50 racionálnych čísel, zvyšných 50 musí byť iracionálnych. Z toho nás potom logicky bude zaujímať, aké rôzne čísla vieme vlastne súčtami racionálnych a iracionálnych čísel získať.

Racionálne číslo je také, ktoré vieme zapísať ako podiel dvoch celých čísel. Iracionálne nevieme. Súčet dvoch racionálnych čísel je vždy racionálny. Súčet racionálneho čísla s iracionálnym je vždy iracionálny (skúste si to sami dokázať). Súčet dvoch iracionálnych čísel je zaujímavý, lebo môže byť racionálny aj iracionálny.

V tomto prípade sa snažíme nájsť maximálny počet racionálnych súčtov, ktoré sa v tabuľke budú nachádzať, môžeme si teda iracionálne čísla napasovať tak, aby súčet dvoch bol vždy racionálny. To dosiahneme napríklad tak, že všetky iracionálne čísla v stĺpcoch budú mať tvar $x + \pi$ a všetky iracionálne čísla v riadkoch budú mať tvar $y - \pi$. x a y sú hocijaké racionálne čísla, avšak rôzne. π je nejaká iracionálna škaredosť, ktorá je všade rovnaká. Sčítavaním nám teda iracionálna časť vždy vypadne a ostane nám len racionálna časť.

Dobre teda, zrátajme si teraz, koľko akých súčtov dostaneme. Nazvime si počet racionálnych riadkov RR, počet iracionálnych riadkov IR, počet racionálnych stĺpcov RS a počet iracionálnych stĺpcov IS. Počet racionálnych súčtov je počet políčok, kde sa stretnú dve racionálne alebo dve iracionálne čísla. Len tak na skúšku si rozdeľme racionálne a iracionálne čísla tak, že v stĺpcoch aj riadkoch bude z každého rovnako, teda 25. Racionálnych súčtov teda bude

$$RR \cdot RS + IR \cdot IS = 25 \cdot 25 + 25 \cdot 25 = 1250.$$

Podobne iracionálne súčty budú tam, kde sa stretne racionálne číslo s iracionálnym, teda

$$RR \cdot IS + IR \cdot RS = 25 \cdot 25 + 25 \cdot 25 = 1250.$$

Môžeme si všimnúť, že nikde neberieme do úvahy rozmiestnenie jednotlivých čísel v stĺpcoch a riadkoch. Nerobíme to náhodou, táto informácia je pre nás úplne zbytočná.

Máme teraz 1250 racionálnych súčtov. To nie je zlé, nejde to ale na viac? Vyskúšajme. Dajme tomu, že začneme s tými počtami, ktoré máme, teda $RR = IR = RS = IS = 25$. Chceme to ale vyrátať trocha všeobecnejšie, takže si tam pridáme parameter celé číslo n, a to tak, že počet racionálnych riadkov bude teraz $RR = 25 + n$. Zvyšné riadky budú potom iracionálne a bude ich $IR = 25 - n$. Celkový počet racionálnych čísel, ktoré Racko dopísal je stále 50, a tak koľko sme pridali/ubrali na riadkoch, musíme ubrať/pridať na stĺpcoch. Racionálnych stĺpcov tak bude $RS = 25 - n$ a iracionálnych stĺpcov $IS = 25 + n$.

Zrátajme teraz znovu, koľko bude racionálnych súčtov:

$$RR \cdot RS + IR \cdot IS = (25 + n) \cdot (25 - n) + (25 - n) \cdot (25 + n) = 1250 - 2n^2.$$

Bez veľkej námahy vidíme, že tento počet bude najväčší, keď $2n^2 = 0$ a teda $n = 0$. A máme, čo sme chceli. Ak sa Racko posnaží, pod stromček môže dostať najviac 1250 darčekov, čo je fakt veľa, a ak mu rodičia nekúpia jedno Lego, Racko celkom vyhral.

1.5 Koule Mi Spadla ($\kappa \leq 7$)

opravovala **Čeky**

Zadanie. *Nešikovná Miladka rozbila pri zdobení stromčeka vianočnú guľu. Na zemi tak skončilo veľa ostrých črepov. Medzi nimi sa nachádzal aj ostrouhlý trojuholník ABC. Os uhla BAC pretínala stranu BC v bode D. Nech k je kružnica opísaná trojuholníku ABD a priamka p je kolmica na priamku AD prechádzajúca bodom B. Miladka si označila E priesečník kružnice k a priamky p rôzny od bodu B a ďalej stred kružnice opísanej trojuholníku ABC ako O. Dokážte, že body A, O, E ležia na jednej priamke.*

Keďže trojuholník ABC je ostrouhlý, sú body O, E v rovnakej polrovine určenej priamkou AB ako bod C. Stačí preto ukázať, že $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle BAO|$. Riešenie si rozdelíme na dva prípady: keď bod E leží mimo trojuholníka ABC a keď leží v trohuholníku ABC. Začneme prípadom, že leží mimo trojuholníka ABC.

Keďže trojuholník ABO je rovnoramenný, tak $|\sphericalangle BAO| = \frac{1}{2}(180° - |\sphericalangle AOB|) = 90° - |\sphericalangle ACB|$. To platí preto, lebo uhol ACB je obvodový k oblúku, ku ktorému je uhol AOB stredový.

Uhly BAE a BDE sú obvodové uhly nad úsečkou BE, preto platí, že $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle BDE|$. Z trojuholníka BDE vieme, že $|\sphericalangle BDE| = 180^\circ - |\sphericalangle DEB| - |\sphericalangle EBD|$. Keďže štvoruholník $BEDA$ je tetivový (čiže súčet jeho protiľahlých uhlov je 180 stupňov), tak platí $180^\circ - |\sphericalangle DEB| = |\sphericalangle BAD|$. Po dosadení do predošlej rovnice dostávame $|\sphericalangle BDE| = |\sphericalangle BAD| - |\sphericalangle EBD|$, čo je to isté ako $|\sphericalangle BAD| - |\sphericalangle FBD|$ (označíme F priesečník priamok BE a AD). Preto dostávame rovnicu

$$|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle BDE| = |\sphericalangle BAD| - |\sphericalangle FBD|.$$

Zo zadania vieme, že $|\sphericalangle BAD| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC|$ a za pomoci trojuholníka BDF vidíme, že

$$|\sphericalangle BAD| - |\sphericalangle FBD| = \tfrac{1}{2}|\sphericalangle BAC| - 180^\circ - (|\sphericalangle DFB| - |\sphericalangle BDF|).$$

Zo zadania ďalej vieme, že uhol DFB je pravý a uhly BDF a CDA sú vrcholové, preto platí aj nasledujúca rovnosť:

$$\tfrac{1}{2}|\sphericalangle BAC| - 180^\circ - (|\sphericalangle DFB| - |\sphericalangle BDF|) = \tfrac{1}{2}|\sphericalangle BAC| - (90^\circ - |\sphericalangle CDA|).$$

Za pomoci trojuholníka ACD môžeme pokračovať v úpravách

$$\tfrac{1}{2}|\sphericalangle BAC| - (90^\circ - |\sphericalangle CDA|) = \tfrac{1}{2}|\sphericalangle BAC| - 90^\circ + (180^\circ - |\sphericalangle DAC| - |\sphericalangle ACD|).$$

Ďalej už vieme pokračovať jednoduchým upravovaním výrazov a prepísmenkovaním uhlov

$$\tfrac{1}{2}|\sphericalangle BAC| + 90 - \tfrac{1}{2}|\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle BCA| = 90 - |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAO|.$$

Ukázali sme teda, že uhly BAE a BAO majú rovnakú veľkosť, a preto body A, E, O ležia na jednej priamke.

Ešte potrebujeme rozobrať prípad, že bod E leží v trojuholníku ABC. Zvoľme si vo vnútri trojuholníka ABC bod M ležiaci na úsečke AE taký, že $|MA| = |MB|$. O tomto bode sa budeme snažiť ukázať, že je zhodný s bodom O.

Veľkosť uhla DAE si označme x. Z rovnosti obvodových uhlov nad tetivou DE vieme, že aj uhol DBE má veľkosť x. Vieme ďalej, že $|\sphericalangle DAB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC|$. Keďže trojuholník AMB je rovnoramenný, tak $|\sphericalangle ABM| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC| + x$.

Z trojuholníka AMB dopočítame, že $|\sphericalangle AMB| = 180^\circ - |\sphericalangle BAC| - 2x$. Keďže uhly AMB a BME sú susedné, tak $|\sphericalangle BME| = |\sphericalangle BAC| + 2x$. Pomocou trojuholníka AFE zistíme, že $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle AEF| = 90^\circ - x$. Z trojuholníka MBE dopočítame, že $|\sphericalangle MBE| = 180^\circ - |\sphericalangle BME| - |\sphericalangle BEM| = 90^\circ - |\sphericalangle BAC| - x$.

Sčítaním uhlov ABM, MBE a EBC dostaneme, že

$$|\sphericalangle ABC| = (\tfrac{1}{2}|\sphericalangle BAC| + x) + (90^\circ - x - |\sphericalangle BAC|) + (x) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}|\sphericalangle BAC| + x.$$

Pomocou trojuholníka ABC dostaneme, že $|\sphericalangle BCA| = 180^\circ - |\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle ABC| = 90^\circ - \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC| - x$.

Vidíme, že veľkosť uhla AMB je dvojnásobkom veľkosti uhla ACB. Keďže uhol ACB je obvodový uhol na kružnici opísanej trojuholníku ABC k oblúku AB, tak uhol AMB musí byť stredový uhol k tomuto oblúku (je to aj vďaka tomu, že $|MA| = |MB|$). Z toho už vyplýva, že bod M je stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC, a preto je zhodný s bodom O. Bod M bol zvolený tak, aby ležal na úsečke AE a teda aj bod O na nej leží, čiže body A, E, O ležia na jednej priamke.

1.6 Kde Mám Soby?!

opravoval **Marek**

Zadanie. *Santa Claus má kvôli lepšej prehľadnosti očíslované soby kladnými celými číslami. Sob číslo a môže cválať vedľa soba b práve vtedy, keď platí*

$$a^3 + b^3 = a^2 + 42ab + b^2.$$

Nájdite všetky dvojice sobov (a, b), ktoré môžu cválať vedľa seba.

Jedna rovnica o dvoch neznámych, a ešte k tomu v celých číslach. Na prvý pohľad komplikovaná úloha, tak skúsme sa na ňu zatiaľ laicky popozerať. Ľavá strana a^3+b^3 by mala rásť rýchlejšie ako pravá strana a^2+b^2+42ab. To preto lebo od nejakého a_0 je pre $a > b$ aj $a^3 > a^2 + 42ab$ a od nejakého b_0 aj $b^3 > b^2$. To by nám malo povedať niečo o konečnom počte riešení. Odskúšať všetky možnosti je však nepraktické. Ďalej sa dá nahliadnuť na to tak, že je to kubická rovnica pre a s parametrom b. Lenže pri počítaní diskriminantu tejto kubickej rovnice sa dopracujeme ku problému rátania koreňov polynómu šiesteho stupňa. To znie ako niečo čo nepôjde ľahko. Preto musíme zvoliť iný prístup k úlohe a nesnažiť sa ísť tvrdohlavo týmto smerom.

V takýchto úlohách je vhodné uvažovať súčiny. Ideálne súčiny čo sa majú rovnať prvočíslu. Pokúsme sa nájsť taký súčin. Môžme napríklad skúsiť rozdeliť a^3+b^3 na súčin dvoch výrazov, takto: $(a+b)(a^2-ab+b^2)$. Teraz na ľavej strane by sme radi našli jeden z týchto súčiniteľov. Vidíme, že súčiniteľ a^2+b^2-ab tam skoro je len si treba požičať extra $-ab$. Takže naša rovnica bude zatiaľ vyzerať takto: $(a+b)(a^2-ab+b^2) = (a^2-ab+b^2)+42ab+ab$. Jednoduchou úpravu dostaneme

$$(a^2 - ab + b^2)(a + b - 1) = 43ab.$$

Super, máme prvočíslo, teraz už môžme začať uvažovať.

Keďže sa ideme hrať s prvočíslami, a teda deliteľnosťou, tak sa nám hodí také niečo ako najväčší spoločný deliteľ čísel a a b, budeme ho značiť $NSD(a, b)$. Nech teda $NSD(a, b) = d$ tak vieme vyjadriť naše premenné ako súčin dačo krát d. $a = dA$ a $b = dB$. Našu rovnicu teda prepíšeme do tvaru $d^2(A^2 - AB + B^2)(dA + dB - 1) = 43d^2AB$, a teda $(A^2 - AB + B^2)(dA + dB - 1) = 43AB$. Ľahko nahliadneme, že $NSD(A^2 - AB + B^2, AB) = 1$ a teda máme dve možnosti:

$$A^2 - AB + B^2 = 43, \qquad (1)$$

$$A^2 - AB + B^2 = 1. \qquad (2)$$

Najprv vybavíme rovnicu (2) prepísaním na $(A - B)^2 + AB = 1$, keďže oba členy na ľavo sú nezáporné tak máme jediné riešenie tejto rovnice A=B=1. Teda aj a=b spätným dosadením do pôvodnej rovnice dostaneme $2a^3 = 2a^2 + 42a^2$, čo je ekvivalentné s $a^2(a - 22) = 0$, a teda riešenie je $a = b = 22$.

Teraz rovnica (1). $A^2 - AB + B^2 = 43$. Túto rovnicu prepíšeme znovu na tvar $(A - B)^2 + AB = 43$. Ale z toho je jasné, že $(A - B)^2 \le 43$ čo vieme prepísať na $|A - B| \le 6$. Keďže je pôvodná aj posledná rovnosť sú symetrické, môžeme písať $A = k + B$ kde $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$. Dosadíme a máme kvadratickú rovnicu s parametrom k: $A^2 - A(A-k) + (A-k)^2 = 43$. Teraz ju upravíme na nejaký krajší tvar. $A^2 - Ak + K^2 - 43 = 0$. Aby mala celočíselné riešenie musí byť odmocnina z diskriminantu celá. Na domácu úlohu si rozmyslite prečo. Teda diskriminant samotný je štvorec nezáporného celého čísla. $D = -3k^2 + 4 \cdot 43$. Odtiaľto taktiež vidíme obmedzenie $k < 7$, lebo diskriminant nemôže byť záporný. Postupným dosadením $k = 0, 1, 2, \ldots, 6$ dostaneme postupne takéto hodnoty diskriminantu 172, 169, 160, 145, 124, 97, 64. Odtiaľ vidíme, že jediné vyhovujúce čísla sú $k = 1$ a $k = 6$, a teda sa dopočítame k riešeniam pre $k = 1$: $A = 7$ alebo $A = -6$, odkiaľ ľahko vidíme, že riešenie $A = -6$ nevyhovuje. Pre $k = 6$ dostaneme zase tie isté riešenia: $A = 7$ a $B = 1$. Ďalej z úvahy o symetrickosti vieme, že nie sú riešenia len dvojice $[a, b]$ ale aj $[b, a]$. To ale znamená, že nemáme len riešenie $a = 7$ a $b = 1$ ale aj $a = 1$, $b = 7$.

Keďže sme overili všetky možnosti, tak jediné soby čo môžu cválať vedľa seba sú $[22, 22], [1, 7], [7, 1]$.

1.7 Klaus, Mikuláš, Santa

opravoval **Jožo**

Zadanie. *Dostali ste od Ježiška darček, ktorý ste chceli? To je síce pekné, ale viete, koľko práce s tým Ježiško má? Ježiško má pripravených m rôznych darčekov, z každého jeden kus. Na svete je n detí ($n \le m$). Pre kladné celé číslo $i \le n$, i-te dieťa má z Ježiškových m darčekov vyhliadnutých d_i darčekov, po ktorých túži ($1 \le d_i \le m$). Ježiško* *vie, že platí*

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_n} \leq 1.$$

Dokážte, že Ježiško môže rozdať deťom po jednom darčeku tak, aby každé dieťa dostalo darček, po ktorom túži.

V zadaní sa nám objavuje prečudesná podmienka o počtoch darčekoch, ktoré majú deti vyhliadnuté. Označme si túto podmienku $(\star)$. Čo nám asi chce povedať? Skúste si pohľadať niekoľko n-tíc čísel $d_1, d_2, \ldots, d_n$ pre rôzne hodnoty n, ktoré podmienku $(\star)$ spĺňajú. Isto si všimnete, že aby podmienka $(\star)$ platila, musia byť počty chcených darčekov veľké. To nám naznačuje, že asi nebude problém rozdať darčeky. Budeme len musieť poriadne zdôvodniť, že je to možné.

Jeden zo spôsobov, ako môžeme ukázať, že darčeky ide rozdať, je opísať priamo postup, ktorým ich má Ježiško rozdať. Skúsme teda celkom priamočiary postup. Ježiško si zoradí deti podľa počtu darčekov, ktorý si želajú. Teda tak, aby platilo $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$. V takomto poradí im bude dávať darčeky z tých, ktoré majú jednotlivé deti vyhliadnuté. Presnejšie, keď príde na rad i-te dieťa, Ježiško mu dá niektorý z jeho vyhliadnutých d_i darčekov, ktorý ešte nedal inému dieťaťu.

Avšak, bude takéto rozdávanie vždy fungovať? Čo ak sa stane, že prídeme takto k dieťaťu, ktorého všetky darčeky sme dali už iným deťom. Musíme ukázať, že sa niečo takéto nestane. Keď dávame darček i-temu dieťaťu, rozdali sme už $i-1$ darčekov. Ak by i-te dieťa chcelo aspoň i darčekov, teda $d_i \geq i$, tak by nám to zaručilo, že by každému dieťaťu ostal aspoň jeden darček.

Skúsme to ukázať sporom. Čo ak by nejaké dieťa, povedzme j-te v poradí, chcelo $d_j < j$ darčekov? Pozrime sa, čo sa stane s podmienkou $(\star)$. Vďaka nášmu usporiadaniu vieme, že deti s číslom k menším ako j chcú tiež menej ako j darčekov. Preto $1/d_k > 1/j$. Z našej podmienky tak dostaneme

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_j} + \frac{1}{d_{j+1}} + \cdots + \frac{1}{d_n} \geq \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_j} > \underbrace{\frac{1}{j} + \frac{1}{j} + \ldots \frac{1}{j}}_{j\text{-krát}} = \frac{j}{j} = 1.$$

Dostali sme teda $1/d_1 + 1/d_2 + \cdots + 1/d_n > 1$, čo je spor. Preto teda pre každé i, $1 \leq i \leq n$ platí $d_i \geq i$ a Ježiško vie darčeky rozdať vyššie opísaným spôsobom.

Riešenie matematickou indukciou

O tom, čo musia spĺňať čísla $d_1, d_2, \ldots, d_n$, sa dá veľa zistiť. Napríklad, že musí existovať dieťa, ktoré chce aspoň n darčekov. Takéto dieťa si môžeme odmyslieť, lebo ak $n-1$ zvyšným deťom rozdáme darčeky, isto odmyslenému dieťaťu ostane nejaký voľný darček. Úloha sa nám zjednodušila, stačí nám ukázať, že možno rozdať ostatným $n-1$ deťom ich vyhliadnuté darčeky. Podmienka $(\star)$ platí aj po odmyslení dieťaťa. Takto by sme mohli pokračovať v odmyslovaní detí, až kým by nám ostalo len jedno dieťa a darček, ktorý chce. Avšak matematika má na to krásny nástroj, ako takéto postupné odmyslovanie exaktne a jednoducho opísať – matematickú indukciu. Jej použitie nám vie uľahčiť riešenie alebo spisovanie mnohých úloh. Poďme si ukázať, ako ju môžeme použiť.

Úlohu vyriešime matematickou indukciou podľa počtu detí n. Ak máme jedno dieťa, chce aspoň jeden darček a ten mu aj vieme dať. Predpokladajme, že pre nejaké k vieme darčeky rozdať ľubovoľným $n = k$ deťom, ktoré spĺňajú podmienku $(\star)$. Majme teraz $k+1$ detí, pre ktoré platí $(\star)$. Medzi nimi existuje dieťa, ktoré chce aspoň $k+1$ darčekov (dôkaz prenechávame čitateľovi, je podobný ako v prvom riešení). Pre ostatných k detí stále platí podmienka $(\star)$, keďže sme z jej ľavej strany len zobrali jeden kladný člen. Preto podľa indukčného predpokladu vie Ježiško rozdať každému z týchto k detí darček, ktorý chce. Taktiež spomedzi $k+1$ darčekov, ktoré chce zvyšné dieťe, existuje niektorý, ktorý ešte žiadne dieťa nedostalo a ten mu vieme dať.

Riešenie cez Hallovu vetu

Skúsenejší riešiteľ si všimne, že túto úlohu môžeme formulovať pomocou teórie grafov[2]. Máme graf, v ktorom vrcholy predstavujú deti a darčeky. Hranou spojíme každé dieťa s tými darčekmi, po ktorých túži. V takomto grafe sú rozdelené vrcholy na dve časti – deti a darčeky. Žiadna hrana nespája dva vrcholy z rovnakej časti. Takýto graf sa nazýva *bipartitiný*. Našou úlohou je ukázať, že v takomto bipartitnom grafe, ktorý spĺňa podmienku $(\star)$ existuje *párenie pokrývajúce množinu detí*, t. j. taká množina hrán M, že žiadne dve hrany nemajú spoločný vrchol a z každého vrchola z množiny detí vychádza hrana z množiny M.

Problém, kedy takéto párenie existuje je dobre preštudovaný. Opisuje ho *Hallova veta*[3], ktorá vraví, že v bipartitnom grafe s partíciami A, B existuje párenie pokrývajúce všetky vrcholy množiny A práve vtedy, keď ľubovoľná podmnožina množiny A má aspoň toľko susedov ako prvkov. Pre vyriešenie úlohy nám teda stačí overiť, či náš graf spĺňa túto *Hallovu podmienku*. Poďme na to.

Pre spor predpokladajme, že existuje k takých detí, že počet darčekov, ktoré má každé z nich vyhliadnuté, je menej ako k. Označme si počty darčekov, ktoré tieto deti chcú, ako $d'_1, d'_2, \ldots, d'_k$. Keďže všetky tieto čísla sú menej ako k, platí

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_n} \geq \frac{1}{d'_1} + \frac{1}{d'_2} + \cdots + \frac{1}{d'_k} > \frac{k}{k} = 1,$$

čím opäť dostávame spor. Preto náš graf spĺňa Hallovu podmienku a podľa Hallovej vety v ňom existuje úplné párenie, čo sme chceli dokázať.

1.8 Kružnica Majestátnych Sviečok

opravovali **Juro** a **Slavo**

Zadanie. *Ku správnej štedrej večeri patrí adventný veniec. Najlepšie taký, ktorý má tvar kružnice k, na ktorej ležia sviečky v štyroch rôznych bodoch A, B, C, D v tomto poradí. Ďalej polpriamky AB a DC sa pretínajú v bode M a polpriamky BC a AD sa pretínajú v bode N. Navyše platí, že $|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle ANM|$ a $|BC| = |CN|$. Prečo je takýto veniec najlepší? Lebo body M, N sú rovnako vzdialené od stredu kružnice k. Dokážte to!*

Prvé zistenie je, že trojuholník BMN je rovnostranný so základňou BM. Toto sa dalo dokázať napríklad obyčajným vyuhlením, cez podobnosti trojuholníkov a mnoho inými metódami.

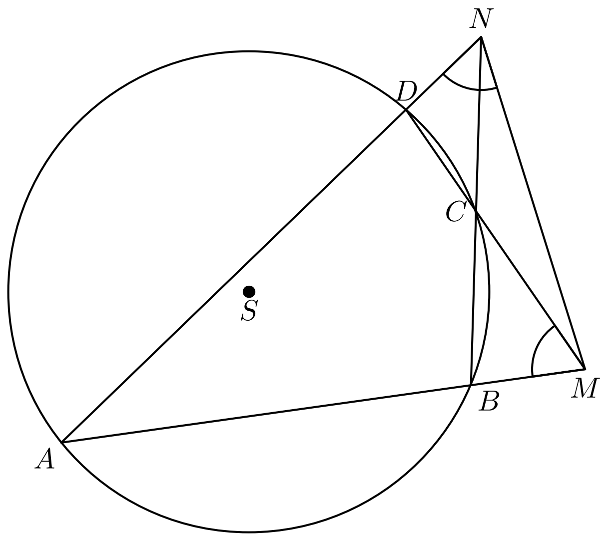
Najjednoduchšia sa nám zdala táto: trojuholníky ADM a AMN majú zo zadania rovnaký jeden uhol a pri vrchole A majú druhý rovnaký, preto sú podobné. Potom ale $|\sphericalangle NMA| = |\sphericalangle ADM|$ Vidíme, že štvoruholník $ABCD$ je tetivový, preto majú protiľahlé uhly súčet $180°$, a teda $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle MBC|$. Získavame tak $|\sphericalangle NMA| = |\sphericalangle ADM| = |\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle MBC|$. Teda trojuholník BMN je rovnoramenný.

Trojuholníky AMN a CBM sú podobné, keďže $|\sphericalangle AMN| = |\sphericalangle CBM|$ z rovnoramennosti, a $|\sphericalangle ANM| = |\sphericalangle CMB|$. Už to skoro ale máme, stačí využiť ich pomery. Platí teda $|CB|/|MB| = |AM|/|NM|$, resp. $|CB|\cdot|NM| = |AM|\cdot|MB|$.

Použijeme poslednú vec zo zadania, a to rovnosť $|NC| = |CB|$. Z rovnoramennosti platí aj $|NB| = |NM|$. Platí teda $|NC| \cdot |NB| = |CB| \cdot |NM| = |MA| \cdot |MB|$, čo sme chceli dokázať.

[2] Pokiaľ ti nasledovné pojmy budú cudzie, o teórii grafov si môžeš prečítať v Zbierke KMS.

[3] Hallova veta je v Zbierke KMS uvádzaná bez dôkazu. Jej dôkaz môžete nájsť napr. na https://kms.sk/312/plugin/attachments/download/525/. Môžete si ju skúsiť dokázať aj sami ako tréning do ďalších úloh KMS. Dôkaz nie je až tak náročný. Stačí sa vyhrať s matematickou indukciou. Skúste sa pozrieť na to, ktoré prípady sú ľahké, kde indukciu použijeme bez problémov. Opíšte potom, čo je na ťažkých prípadoch problematické a skúste sa od toho odraziť.



1.9 Kvalitnejší Mirov Seminár

opravoval **Pedro**

Zadanie. *Miro dostal pod stromček nasledujúcu funkcionálku, aby si tým skvalitnil svoj seminár. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí*

$$f(x + yf(x)) = f(xf(y)) - x + f(y + f(x)).$$

Máme nájsť všetky funkcie, pre ktoré platí daná rovnosť. Predpokladajme teda, že to nejaká konkrétna funkcia spĺňa. Keďže to spĺňa pre všetky reálne x a y, spĺňa to aj pre ľubovoľné x a y, ktoré tam dosadíme. Postupným dosádzaním šikovných kombinácií premenných x a y vytvoríme sadu podmienok, ktoré musí spĺňať každá funkcia, ktorá spĺňa našu rovnosť. Následne rôznymi úvahami o tejto sade podmienok (poprípade ďalšími šikovnými dosadeniami využívajúcimi už zistené vzťahy) môžeme získať cenné informácie a dúfať, že raz dostaneme explicitný predpis (alebo predpisy) našej funkcie. Keďže tento predpis musia spĺňať všetky funkcie vyhovujúce zadaniu, vieme, že tento predpis/-y je nutnou podmienkou existencie našej hľadanej funkcie/-ií.

Začnime dosadením dvojice $(x, y) = (0, 0)$ (neskôr už tento zápis budeme používať skrátene), to je taký klasický začiatok, z ktorého chceme obvykle zistiť niečo o $f(0)$. Po dosadení dostávame: $f(0) = f(0) + f(f(0))$, a teda po úprave $f(f(0)) = 0$. Nuž, nie je to zlé, ale mohlo to byť aj lepšie.

Skúsme trochu všeobecnejšiu dvojicu: $(x, 0)$, kde x je ľubovoľné reálne číslo: $f(x) = f(xf(0)) - x + f(f(x))$. Ďalej môžeme skúsiť opačnú dvojicu $(0, x)$: $f(xf(0)) = f(0) + f(x + f(0))$. Označme $c = f(0)$.

Nech $c = 0$. Potom z druhého vzťahu dostaneme $f(x) = 0$. Po dosadení do pôvodnej rovnice však vidíme, že takáto funkcia zadaniu nevyhovuje. Preto $c \neq 0$ (tu vidíme, že nutnosť podmienky nezaručuje jej postačujúcosť).

Posvieťme si na druhú rovnicu bližšie. Máme $f(cx) = c + f(x + c)$. Všimnime si, že ak $c \neq 1$ (predpokladajme to), tak s meniacim sa x-om sa nám argument na ľavej strane mení inak rýchlo ako argument na pravej strane. Zároveň $c \neq 0$. Preto by sme vedeli nájsť také x, pre ktoré by sa argumenty naľavo a napravo rovnali.

$$cx = x + cx = \frac{c}{c-1}$$

Potom po dosadení tejto hodnoty do nášho vzťahu dostávame:

$$f\left(\frac{c^2}{c-1}\right) = c + f\left(\frac{c^2}{c-1}\right), \quad \text{teda} \quad c = 0,$$

čo je spor s tým, čo už sme zistili. Preto $c = f(0) = 1$.

Pozrime sa, ako sa vďaka tomuto zisteniu zjednodušia naše dva základné vzťahy: $x = f(f(x))$ z prvého vzťahu a $f(x) = 1 + f(x+1)$ z druhého. Oba tieto vzťahy už sú pomerne veľavravné. Špeciálnu pozornosť by som kládol na ten prvý, ku ktorému ak sa vo funkcionálnej rovnici dostanete, tak už viete, že ste na dobrej ceste. Prečo? Tento vzťah totiž o funkcií prezrádza, že je zároveň prostá a zároveň surjektívna. K týmto dvom vlastnostiam sa človek dokáže dostať peknými úvahami (nechám na vás) alebo jednoducho tak, že surjektívnosť vyplýva jasne z toho, že za x vieme dosadiť hocičo a evidentne vieme nájsť takú hodnotu z, pre ktorú je $f(z)$ rovné x. Prostosť vyplýva z nasledovnej jednoduchej myšlienky: nech $k \neq l$ a nech $f(k) = f(l)$. Dosaďte si to do $x = f((x))$ a už uvidíte pravdu.

Druhý vzťah sám o sebe nie je až taký silný, ale dáva nám tip, ako by funkcia mohla vyzerať – konkrétne tu nás vedie k myšlienke, že funkcia by mohla byť $f(x) = 1 - x$. Pozor! Toto čisto z tohto vzťahu ešte dokázať nevieme! Zamyslite sa, prečo (niektorým z vás bude stačiť, keď si prečítajú komentár k ich riešeniu).

Teraz už ale máme dosť silný arzenál na to, aby sme to naozaj dokázali. Stačí dosadiť dvojicu $(1, x) : f(1) = f(f(x)) - 1 + f(x)$. Využijúc nami získané informácie z tohto dostávame: $f(x) = 1 - x$.

Podobne sa vieme dopracovať k výsledku aj dosadením $(x, 1) : f(x + f(x)) = 1 - x + f(1 + f(x))$. Využijúc $f(x) = 1 + f(1 + x)$ a $f(f(x)) = x$ dostaneme: $f(x + f(x)) = 0$. Lenže my vieme, že $f(1) = 0$ (lebo $f(1) = f(0) - 1$), a keďže funkcia je prostá, tak existuje iba jediný argument, pre ktorý $f(\mathit{argument}) = 0$, a teda to musí byť 1. Teda $x + f(x) = 1$ alebo $f(x) = 1 - x$.

Stačí nám už teraz overiť, či nami získaná podmienka pre funkciu (explicitný predpis) naozaj vyhovuje zadaniu – t. j. pre všeobecné hodnoty (x, y) ukázať, že naša funkcia skutočne vyhovuje zadaniu. Tento krok už opäť nechám na čitateľa.

Poznámka: Táto úloha sa dala riešiť aj jednoduchšie, vlastne len čisto s dosadeniami, ja som ju naschvál vyriešil takto, aby som mohol ukázať celkom useful myšlienky o dosadeniach, ktoré si vypočítame, prostosti, surjektívnosti, vzťahu naznačujúcemu výsledok a následnému doklepnutiu.

1.10 Komunikácia Môjho Svetonázoru

opravovali **Marián** a **Vodka**

Zadanie. *V KMS je niekoľko vedúcich a niektoré dvojice sa spolu kamarátia. Namiesto toho, aby si užívali pokojné Vianočné sviatky, sa radšej hádajú, či je krajšia fialová alebo modrá farba. Na začiatku si každý vedúci myslí, že krajšia je fialová. Občas sa stane, že jeden vedúci zorganizuje stretnutie, ktorého sa zúčastní on a všetci jeho kamaráti. Po tomto stretnutí sa všetkým zúčastneným vedúcim zmení názor. Je možné bez ohľadu na to, ako sa vedúci kamarátia, že po niekoľkých stretnutiach si budú všetci vedúci myslieť, že je krajšia modrá?*

Ako vo veľa úlohách, aj v tejto bude užitočná matematická indukcia. My budeme robiť indukciu na počet vedúcich.

Prvý krok indukcie je ukázať naše tvrdenie pre triviálny prípad – keď máme len jedného vedúceho. Ten je sám a nemá žiadnych kamarátov, takže keď ho pozveme na stretko, názor sa zmení len jemu. Easy.

Zaujímavejší je prípad, keď máme vedúcich viac ako jedného. Vtedy môžeme využiť indukčný predpoklad, že pre všetky skupiny menších vedúcich tvrdenie platí – t. j. že vieme zvolať stretká tak, aby sa všetkým zmenil názor. Vieme preto jedného vedúceho, napr. Vodku, vynechať a zvolať stretká tak, že sa zmení názor všetkým vedúcim okrem Vodku. Pri ňom mohli nastať dve veci, buď sme názor zmenili aj Vodkovi a vyhrali sme, alebo sa nám to nepodarilo.

Ak sa nám to nepodarilo, všimneme si, že sme nemuseli vynechať Vodku ale mohli sme vynechať hocijakého vedúceho. Keby sme pri vynechaní iného vedúceho, napríklad Mariána, mali šťastie, že po zmenení názoru všetkých ostatných by sa zmenil aj Mariánovi názor, tak sme znova vyhrali.

Ak nie, tak to znamená, že pre ľubovoľného vedúceho dokážeme zmeniť názor všetkým vedúcim okrem neho. Keď toto urobíme dvakrát s rôznymi vedúcimi – napríklad s Vodkom a Mariánom, tak Vodkovi a Mariánovi zmeníme názor a ostatným ho zmeníme dvakrát, čiže im ostane pôvodný názor. Keďže to vieme urobiť s ľubovoľnými dvoma vedúcimi, znamená to, že vieme zmeniť názor ľubovoľným dvom vedúcim.

Ak máme párny počet vedúcich, opäť je to jednoduché, pretože takto všetkým po dvojiciach dokážeme zmeniť názor na ten správny, že modrá je lepšia.

Už nám len ostáva prípad, že máme nepárny počet vedúcich. Keby sme vedeli zmeniť názor nepárnemu počtu vedúcich, mohli by sme pokračovať zvyšnými pármi, a zmeniť názor všetkým vedúcim. Najjednoduchšie by sme to mohli urobiť tak, že stretko zvolá taký vedúci, ktorý má párny počet priateľov. Otázka je, či taký vedúci existuje.

Odpoveď je áno, pretože keď sčítame priateľov všetkých vedúcich, zarátame každé priateľstvo dvakrát, a teda dostaneme párne číslo. Keby mal každý vedúci nepárny počet priateľov, tak by súčet priateľov všetkých vedúcich bol nepárny, čo je spor .

Preto naozaj môže tento vedúci zvolať stretko, tým zmeníme názor nepárnemu počtu vedúcich, a sme spokoní, pretože takto už naozaj dokážeme zmeniť názor každému vedúcemu.

Tým je dôkaz indukciou ukončený a naozaj vieme pre ľubovoľný počet vedúcich zvolať stretká tak, aby všetci zmenili názor.