Hallova veta

Jozef Rajník, Letná škola matematiky 31. 7. – 4. 8. 2017

Úvod o teórii grafov si môžete pozrieť napr. v Zbierke KMS, ktorá je dostupná na `https://kms.sk/zbierka/` alebo v internetových či knižných zdrojoch.

Veta 1 (Hall)**.** Bipartitný graf G s partíciami A, B má párenie pokrývajúce všetky vrcholy množiny A práve vtedy, keď ľubovoľná podmnožina vrcholov množiny A má aspoň toľko susedov ako prvkov.

Poznámka. Ak chceme perfektné párenie, tak nám stačí ukázať, že $|A| = |B|$.

Dôkaz. Ľahko vidieť, že ak graf G má párenie pokrývajúce množinu A, uvedená podmienka (budeme ju nazývať *Hallova podmienka*) platí. Ťažiskom dôkazu bude ukázať opačnú implikáciu, t. j. ak pre graf G platí Hallova podmienka, obsahuje párenie pokrývajúce množinu A. Dôkaz spravíme matematickou indukciou podľa počtu vrcholov v partícii A.

Ak $|A| = 1$, tak Hallova podmienka nám hovorí, že jediný vrchol v množine A má suseda. Vybraním hrany, ktorá ho s ním spája máme hľadané párenie.

Predpokladajme, že Hallova veta platí pre všetky bipartitné grafy, v ktorých $|A| < k$. Ukážeme, že platí aj pre také grafy, kde $|A| = k$. Prepokladajme, že každá vlastná[1] podmnožina množiny A má viac susedov ako prvkov. V takomto krásnom grafe si môžeme zvoliť ľubovoľný vrchol a z partície A. Z Hallovej podmienky vieme, že má aspoň jedného suseda $b \in B$. Odstráňme teraz z grafu G vrcholy a a b a označme nový graf ako G' a jeho partície ako $A' = A - \{a\}$ a $B' = B - \{b\}$.

Zoberme si ľubovoľnú podmnožinu X množiny A'. Koľko má susedov v grafe G'? V grafe G má množina X aspoň $|X| + 1$ susedov. Preto v grafe G' má isto aspoň $|X|$ susedov. To znamená, že graf G' spĺňa Hallovu podmienku. Keďže má $k - 1 < k$ vrcholov, podľa nášho indukčného predpokladu vieme, že v ňom existuje párenie pokrývajúce A'. Ak k nemu pridáme hranu spájajúcu a a b, dostaneme párenie pokrývajúce A v grafe G.

Lenže svet nemusí byť taký krásny a nemusí platiť, že každá podmnožina množiny A má viac susedov ako prvkov. Čo ak to neplatí? To znamená, že existuje vlastná podmnožina A_1 množiny A, ktorá má v grafe G práve $|A_1|$ susedov. Označme si množinu jej susedov ako B_1. Teraz vieme tiež niečo fajn o našom grafe. Preto nebudeme zúfať a v každej jeho časti nájdeme perfektné párenie.

Uvažujme bipartitiný graf G_1, ktorý dostaneme z grafu G ak partície zúžime na A_1 a B_1. Keďže všetci susedia vrcholov z množiny A_1 sú v množine B_1, Hallova podmienka ostala v grafe G_1 zachovaná. Preto podľa indukčného predpokladu v grafe G_1 existuje párenie pokrývajúce A_1.

Podobne uvažujme graf G_2 s partíciami $A_2 = A - A_1$ a $B_2 = B - B_1$. Spĺňa aj graf G_2 Hallovu podmienku? Čo ak by existovala podmnožina X množiny A_2, ktorá by mala menej ako $|X|$ susedov? Označme si jej susedov ako Y. Zoberme si v grafe G množinu $M = A_1 \cup X$, čo je podmnožina A. Vďaka tomu, že $A_1 \cap X = \emptyset$ má množina M práve $|A_1| + |X|$ prvkov. Keďže A_1 má $|A_1|$ susedov a X má menej ako $|X|$ susedov, má množina M menej ako $|A_1| + |X|$ prvkov. Avšak to je menej ako jej veľkosť. To je v spore s tým, že graf G spĺňa Hallovu podmienku. Preto graf G_2 spĺňa tiež Hallovu podmienku a z indukčného predpokladu v ňom existuje párenie pokrývajúce množinu A. $\square$

Úloha 1. Nech G je bipartitný graf, v ktorom každý vrchol má stupeň $d > 0$. Dokážte, že jeho hrany možno zafarbiť d farbami tak, aby hrany so spoločným vrcholom mali rôznu farbu.

Úloha 2. Kúzelník zamiešal balíček 52 žolíkových kariet (bez žolíkov) a rozdelil ich na 13 kôpok po 4 karty. Dokážte, že Kúzelník vie z každej kôpky vybrať jednu kartu tak, aby z každej hodnoty vytiahol práve jednu kartu (t. j. dvojku, trojku, ..., kráľa a eso).

Úloha 3. Dané sú dva štvorcové kusy papiera, každý s obsahom 2003. Každý papier je rozdelený na 2003 mnohouholníkov s obsahom 1 (rozdelenia môžu byť rôzne). Jeden kus papiera položíme na druhý. Dokážte, že môžeme pomocou 2003 špendlíkov prepichnúť všetkých 4006 mnohouholníkov.

Úloha 4. Nech n je kladné celé číslo. Nech $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sú podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ také, že pre ľubovoľné $1 \leq k \leq n$ zjednotenie ľubovoľných k podmnožín obsahuje aspoň k prvkov. Dokážte, že existuje permutácia $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ čísel $(1, 2, \ldots, n)$ taká, že $a_i \in S_i$.

Úloha 5. Na šachovnici $2n \times 2n$ políčok je v každom riadku a v každom stĺpci práve n kameňov. Dokážte, že vieme spomedzi nich vybrať $2n$ kameňov tak, že každý je v inom stĺpci a v inom riadku.

[1] Vlastná podmnožina množiny M je taká jej podmnožina, ktorá nie je presne M. To, že X je vlastnou podmnožinou množiny M budeme zapisovať ako $X \subsetneq M$.

Úloha 6. Turnaja, ktorý trval $2n - 1$ dní, sa zúčastnilo $2n$ tímov. V jeden deň hral každý tím jednu hru proti inému tímu. V každej hre jeden tím vyhral a druhý prehral. Počas turnaja každý tím hral proti každému tímu práve raz. Je možné vybrať jeden víťazný tím z každého dňa bez toho, aby sme nejaký tím vybrali viackrát?

Úloha 7. Na každom políčku mriežky $n \times n$ je napísané číslo 0 alebo 1 tak, že ľubovoľná množina políčok, ktorá neobsahuje dve políčka v rovnakom riadku alebo v rovnakom stĺpci, obsahuje aspoň jednu jednotku. Dokážte, že existuje i riadkov a j stĺpcov, ktorých prienik obsahuje samé jednotky a navyše $i + j \geq n + 1$.

Úloha 8. Účastníci letných škôl išli autobusmi na výlet. Trojsten zabezpečil n autobusov rovnakej kapacity pre cestu tam aj späť. Každý účastník sedel na jednom sedadle. Pre všetkých účastníkov nestačilo $n - 1$ autobusov. Každý študent, ktorý išiel autobusom tam, išiel autobusom aj späť, ale nie nutne tým istým. Dokážte, že existuje n študentov takých, že každý dvaja študenti boli v rôznych autobusoch počas oboch jázd.

Úloha 9. Na istej planéte sa nachádza 2^N krajín, $N \geq 4$. Každá krajina má vlajku $1 \times N$ štvorčekov, na ktorej je každý štvorček zafarbený nažlto alebo namodro. Žiadne dve krajiny nemajú rovnakú vlajku. Hovoríme, že množina N vlajok je *pestrá*, ak tieto vlajky vieme usporiadať do štvorca $N \times N$ tak, že všetkých N štvorčekov na hlavnej diagonále má rovnakú farbu. Nájdite najmenšie kladné celé číslo M také, že z ľubovoľných M vlajok možno vybrať množinu N pestrých vlajok.