Štvorčekové siete

Jozef Rajník, Letná škola Trojstenu 16. 7. 2019

Úloha 1. Na štvorčekovej sieti $n \times n$ políčok sa nachádza loď tvaru tetromina L. V závislosti od celého čísla $n \geq 3$ určte, na koľko najmenej políčok treba vystreliť, aby sme loď s istotou zasiahli (aspoň raz).

Úloha 2. Do tabuľky s veľkosťou $n \times n$ vpíšeme čísla $1, 2, 3, \ldots, n^2$, každé práve raz. Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré je pravda, že vždy (teda pre každé vpísanie čísel) vieme z tabuľky vybrať dvojicu políčok susediacich rohom alebo stranou tak, že súčet čísel vpísaných v týchto políčkach bude deliteľný 4?

(Zovšeobecnenie KMS 2007/2008-Z2-8)

Úloha 3. Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré vieme uložiť čísla 1 až n^2 do štvorčekovej siete $n \times n$ tak, aby v ľubovoľnom T-čku, zloženom zo štyroch políčok, bol súčet čísel párny? T-čko môže byť aj otočené.

(Zovšeobecnenie KMS 2012/13-L1-8)

Úloha 4. V štáte Obdĺžnisisipi je mn miest rozmiestnených rovnomerne v pravouhlej mriežke rozmerov $m \times n$, pričom m aj n sú prirodzené čísla. Do každého mesta vedie presne k ciest, ktoré spájajú toto mesto s niekoľkými jeho susednými mestami. Susedné mestá k nejakému mestu sú tie, ktoré sú hore, dole, naľavo alebo napravo od daného mesta (nie diagonálne). Dve mestá môžu byť spojené aj viac ako jednou cestou. *Vyhovujúce* rozmiestnenie ciest je také, že z ľubovoľného mesta sa postupne po cestách vieme dostať do ľubovoľného iného. Určite všetky možné trojice čísel (m, n, k), pre ktoré existuje nejaké vyhovujúce rozmiestnenie ciest. Zdôvodnite tiež, prečo pre iné trojice vyhovujúce rozmiestnenia neexistujú.

(KMS 2010/2011-Z1-7)

Úloha 5. Nech n a m sú prirodzené čísla. Predstavme si, že máme v lese nekonečne veľkú šachovnicu. Šachová figúrka *roháč* sa v jednom ťahu pohne najprv o n políčok vodorovne alebo zvislo a potom o m políčok v kolmom smere. Skočí vlastne v tvare písmena L. Roháč skáče ľubovoľne po šachovnici a nikdy ho to neomrzí. Dokážte, že nekonečnú šachovnicu vieme ofarbiť čiernou a bielou farbou tak, že roháč po každom ťahu zmení farbu svojho políčka. Zdôvodnite toto tvrdenie pre ľubovoľné prirodzené čísla m a n.

(KMS 2009/2010-L3-8)

Úloha 6. Rozhodinte, či je možné ofarbiť každé políčko štvročekovej siete 11×13 políčok čiernou a bielou farbou tak, aby každé políčko susedilo s nepárnym počtom políčok rovnakej farby ako ono samé.

(KMS 2009/2010-Z1-9)

Úloha 7. Šachovnica 3000×3000 je rozdelená na dominové doštičky (teda obdĺžniky veľkosti 1×2). Dokážte, že vieme dominové doštičky ofarbiť tromi farbami tak, aby doštičiek jednotlivých farieb bolo rovnako veľa a aby žiadna doštička nemala viac ako dvoch susedov takej farby, akú má sama.

(KMS 2007/2008-Z2-14)

Úloha 8. Petržlen dostal na Vianoce novú šachovnicu $n \times n$ a jedného šachového jazdca. Na každé políčko šachovnice napísal číslo 0. Potom si vybral dve políčka, medzi ktorými vie skočiť jazdec, a na obe políčka napísal číslo o jedna väčšie (pričom pôvodné čísla vymazal). Toto niekoľkokrát zopakoval. Keď skončil, na šachovnici bolo napísané každé z čísel $1, 2, \ldots, n^2$ práve raz. Pre aké n sa to mohlo Petržlenovi podariť?

(KMS 2010/2011-L1-9)

Úloha 9. Uvažujme mnohouholník s celočíselnými stranami taký, že každé dve jeho susedné strany sú na seba kolmé (nemusí byť konvexný). Dokážte, že ak ho vieme pokryť neprekrývajúcimi sa dominovými kockami veľkosti 2×1 umiestnenými rovnobežne s jeho stranami, tak aspoň jedna z jeho strán má párnu dĺžku.

(KMS 2007/2008-L2-11)

Úloha 10. Na šachovnici 8×8 nazývame dve políčka *dotýkajúce sa*, ak spolu susedia stranou alebo rohom. Určte, či dokáže šachový kráľ prejsť celú šachovnicu tak, že začína na nejakom políčku, a počnúc od druhého ťahu sa vždy pohne na políčko dotýkajúce sa s párnym počtom už navštívených políčok. Každé políčko šachovnice pritom navštívi práve raz.

(KMS 2011/2012-L3-11)

Ďalšie úlohy

Úloha 11. Do tabuľky veľkosti 5×5 vpisujeme čísla -1, 0 a 1. Chceli by sme to urobiť tak, aby súčty čísel v každom riadku, stĺpci aj na oboch diagonálach boli rôzne. Ukážte, že sa to tak urobiť nedá.

(KMS 2007/2008-L3-2)

Úloha 12. V štvorcom parku je do štvorcovej mriežky 100×100 umiestnených 10 000 stromov. Koľko z nich sa dá najviac vyťať tak, aby zo žiadneho pňa nebolo vidieť iný peň? Dokážte, že viac pňov sa už takto vyťať nedá.

(KMS 2007/2008-Z1-6)

Úloha 13. Shakira má doma štvorčekovú sieť rozmerov $2n \times 2n$, kde n je prirodzené číslo. Na niektorých jej políčkach sú rozmiestnené biele a na niektorých čierne kamene. Sú rozmiestnené tak, že na každom políčku je buď jeden kameň alebo žiadny kameň. Shakira veľmi obľubuje nasledujúcu hru. Najskôr odstráni všetky čierne kamene, ktoré sú v rovnakom stĺpci ako nejaký biely kameň. Následne odstráni všetky biele kamene, ktoré sú v rovnakom riadku ako nejaký zo zvyšných čiernych kameňov (a tým hra končí). Dokážte, že po takejto hre ostane na sieti z niektorej farby (bielej, čiernej alebo oboch) nanajvýš n^2 kameňov. zadanie

(KMS 2009/2010-Z3-7)

Úloha 14. Dokážte, že čísla 1, 2, ..., 16 vieme rozmiestniť na šachovnicu 4×4 tak, že každé použijeme práve raz a rozdiel čísel na ľubovoľných dvoch políčkach susediacich stranou bude najviac 4. Dokážte, že ich nevieme rozmiestniť tak, aby sme opäť každé použili práve raz, ale rozdiel čísel na ľubovoľných dvoch susedných políčkach bol vždy najviac 3.

(KMS 2007/2008-Z3-9)

Úloha 15. CéDečka prestalo baviť skákať po nekonečnej šachovnici koňom, ktorý chodí klasicky do tvaru písmena L. Preto si vymyslel (a, b)-koňa, ktorý skáče o a políčok jedným smerom, o b políčok druhým smerom a postavil ho na svoju nekonečnú šachovnicu. Zistite, pre ktoré prirodzené čísla a a b sa jeho (a, b)-kôň vie dostať na vedľajšie políčko, susediace stranou so začiatočným políčkom, na menej ako $a + b$ ťahov.

(KMS 2011/2012-L1-10)

Prvé návody k riešeniam

1.

2. Miesto čísel $1, 2, 3, \ldots, 22^2$ stačí uvažovať ich zvyšky po delení štyrmi. Skúste sledovať menšie časti tabuľky

3. Stačí iba rozlišovať, či je na políčku párne alebo nepárne číslo. Skúste sa pozrieť na parity čísel vo vhodnej malej časti siete.

4.

5.

6. Využite, že z jednej farby musí byť nepárny počet políčok.

7. Označte si vhodne políčka šachovnice číslami 0, 1, 2 a nájdite predpis, ako z čísel zakrytých políčok určiť farbu domina.

8.

9. Ukážte obrátenú implikáciu. Pre ukazovanie, že mnohouholník s nepárnymi dĺžkami strán nejde pokryť dominovými kockami, použite vhodné ofarbenie.

10.

11. Koľko rôznych súčtov z čísel -1, 0 a 1 viete dosiahnuť?

12. Najviac možno vyťať 2 500 stromov.

13.

14. V druhej časti úlohy skúmajte, ako vzdialené môžu byť čísla 1 a 16 a pozrite sa na políčka medzi nimi.

15.

Druhé návody k riešeniam

1.

2. Rozdeľte si tabuľku na štvorčeky 2×2. V každom štvorčeku musí byť práve jeden zvyšok 0 a práve jeden zvyšok 2. Zvyšné dva zvyšky v štvorčeku musia byť buď jednotky, alebo trojky.

3. Ukážte, že v každom „plusku“ zloženom z piatich políčok musia mať čísla rovnakú paritu.

4.

5.

6. Spočítajte počet susedstiev medzi izbami farby, ktoré má nepárny počet políčok. Ukážte, že musí byť aj párny, aj nepárny.

7. Do políčka v r-tom riadku a s-tom stĺpci vpíšte číslo $(r+s) \bmod 3$. Dominu, ktoré zakrýva políčka s číslami a, b, priraďte farbu $(a+b) \bmod 3$.

8.

9. Rozdeľte si mnohouholníka na políčka 1×1 a ofarbite ich šachovnicovo. Všetky rohy majú rovnakú farbu, nech je to čierna. Okolo nekonvexných rohov sú dve čierne a jedno biele políčko. Spočítajte počet čiernych a bielych políčok pomocou mrežových bodov v konvexných rohoch, nekonvexných rohoch, vnútri strán a vnútri mnohouholníka.

10.

11. Na splnenie úlohy je potrebných 12 rôznych súčtov. Vieme toľko rôznych súčtov získať?

12. Rozdeľte si mriežku na štvročeky 2×2. Z každého štvorčeku možno vyťať najviac jeden strom. Ak vytneme z každého štvorčeka strom vpravo hore, na spojnici ľubovoľných dvoch pňov bude ležať strom.

13.

14. V prvej časti úlohy stačí čísla zaradom napísať do tabuľky po riadkoch. V druhej časti úlohy môžu byť čísla 1 a 16 vzdialené: a) 5 políčok (jedno je v rohu a druhé susedí s rohovým políčkom) – ktoré čísla musia vtedy byť na ceste medzi nimi? b) 6 políčok (v protiľahlých rohoch) – ktoré čísla musia byť na uhlopriečke? A ktoré čísla tesne nad uhlopriečkou?

15.